会发生呢? 回答: 一般不会发生. 从长期实践中得到"概率很小的事件在一次试验中几乎不发生"(称之为实际推断原理), 但是若独立进行成千上万次试验, 结果又如何呢? 且看下面的例题.

例 1.5.5 某技术工人长期进行某项技术操作, 经验丰富, 因嫌按规定操作太过烦琐, 他就按照自己的方法进行, 但这样做有可能发生事故. 设他每次操作发生事故的概率为 p ($p>0$ 且很小), 他独立地进行了 n 次操作, 求:

(1) n 次都不发生事故的概率;

(2) 至少有一次发生事故的概率.

解 设 $A=\{n$ 次都不发生事故$\}$, $B=\{n$ 次中至少有一次发生事故$\}$, $C_i=\{$第 i 次不发生事故$\}$, $i=1,2,\cdots,n$, 由题意知 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 相互独立, 且 $P(C_i)=1-p$. 故

(1) $P(A)=P(C_1C_2\cdots C_n)=(1-p)^n$.

(2) $P(B)=1-P(A)=1-(1-p)^n$.

注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty}P(B)=1$, 也就是说, 虽然每次发生事故的概率 p 很小, 但只要次数多 (n 充分大), 至少有一次发生事故的概率就会大, 甚至接近于 1. 总之, 随着独立重复试验次数的增多, "小概率事件至少有一次发生" 的概率渐渐增大.

思考题一

1. 若 $A\supset B$, 则 $A\cap B=B$, $A\cup B=A$, $\overline{A}\subset\overline{B}$ 中哪些一定成立?
2. 随机事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 是个变化的数, 而发生的概率 $P(A)$ 是一个定数, 这一说法对吗? 当 n 充分大时, $P(A)=f_n(A)$, 这一结论对吗? 掷一枚硬币 100 次, 记前 n 次正面出现的频率为 $f_n(H)$, 则 $|f_{10}(H)-0.5|>|f_{100}(H)-0.5|$ 一定成立吗?
3. 举例说明 $P(A\cap B)$ 与 $P(B|A)$ 的不同含义.
4. 因为随机事件 A 发生时 $A\cup B$ 一定发生, 所以 $P(A|A\cup B)=1$, 这一说法对吗?
5. 当 $P(A)>0, P(B)>0$ 时, 随机事件 A,B 相互独立与互不相容能同时成立吗?

习题一 (A)

A1. 为了解吸烟对人体健康产生的影响, 对一社区居民进行抽样调查, 分别用 0,1,2 表示不吸烟、少量吸烟及吸烟较多, 再用

a,b,c 表示身体健康、一般及患病. 例如, $(0,a)$ 就表示抽到的居民是不吸烟的健康者.

(1) 问试验的样本空间共有多少个样本点?

(2) 设 $A=\{$抽到的居民身体健康$\}$, 写出 A 所包含的样本点;

(3) 设 $B=\{$抽到的居民不吸烟$\}$, 写出 B 所包含的样本点.

A2. 写出下列随机试验中的随机事件 A 和 B 所包含的样本点:

(1) 掷一颗骰子,

$$\text{事件 } A=\{\text{点数不大于 } 2\}, \text{ 事件 } B=\{\text{点数大于 } 3\};$$

(2) 将一颗骰子掷两次,

$$\text{事件 } A=\{\text{两次点数之差的绝对值为 } 2\},$$
$$\text{事件 } B=\{\text{第一次点数是第二次点数的 } 3 \text{ 倍}\};$$

(3) 在以 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形内随机取一点, 记其坐标 (x,y),

$$\text{事件 } A=\{\text{横坐标 } x \text{ 不大于纵坐标 } y\},$$
$$\text{事件 } B=\{\text{横坐标 } x \text{ 小于 } 0.5 \text{ 且纵坐标 } y \text{ 大于 } 0.5\}.$$

A3. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 一盒中有编号为 1, 2, 3 的三个球, 依次随机地抽取 2 次, 每次取 1 个, 无放回, 观察两个球的编号;

(2) 一盒中有编号为 1, 2, 3 的三个球, 依次随机地抽取 2 次, 每次取 1 个, 有放回, 观察两个球的编号;

(3) 某超市每天的营业时间为 7:00—22:00, 观察某天进入该超市的人数;

(4) 在以 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形内 (含边界) 随机取一点, 记录其坐标.

A4. 设 A,B,C 为 3 个随机事件, 请用事件的运算关系式表示:

(1) A,B,C 至少有 2 个发生;

(2) A,B,C 最多有 1 个发生;

(3) A,B,C 恰有 1 个不发生;

(4) A,B,C 至少有 1 个不发生.

A5. 设 A,B 为两个随机事件, 且 A,B 中至少有一个发生的概率为 0.9.

(1) 若 B 发生的同时 A 不发生的概率为 0.4, 求 $P(A)$;

(2) 若 $P(B)=0.6$, 求 A 发生的同时 B 不发生的概率.

A6. 设 A,B 为两个随机事件, 已知 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.4$, 在下列两种情况下分别求 $P(A\cup B)$ 和 $P(A\overline{B})$:

(1) A 与 B 互不相容;

(2) 当 B 发生时必有 A 发生.

A7. 设事件 A 与 B 互不相容, $P(A)=0.3$, $P(B)=0.5$, 求:

(1) A 与 B 至少有一个发生的概率;

a,b,c 表示身体健康、一般及患病. 例如, $(0,a)$ 就表示抽到的居民是不吸烟的健康者.

(1) 问试验的样本空间共有多少个样本点?

(2) 设 $A=\{$抽到的居民身体健康$\}$, 写出 A 所包含的样本点;

(3) 设 $B=\{$抽到的居民不吸烟$\}$, 写出 B 所包含的样本点.

A2. 写出下列随机试验中的随机事件 A 和 B 所包含的样本点:

(1) 掷一颗骰子,

$$事件\ A=\{点数不大于\ 2\},\ 事件\ B=\{点数大于\ 3\};$$

(2) 将一颗骰子掷两次,

$$事件\ A=\{两次点数之差的绝对值为\ 2\},$$
$$事件\ B=\{第一次点数是第二次点数的\ 3\ 倍\};$$

(3) 在以 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形内随机取一点, 记其坐标 (x,y),

$$事件\ A=\{横坐标\ x\ 不大于纵坐标\ y\},$$
$$事件\ B=\{横坐标\ x\ 小于\ 0.5\ 且纵坐标\ y\ 大于\ 0.5\}.$$

A3. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 一盒中有编号为 1, 2, 3 的三个球, 依次随机地抽取 2 次, 每次取 1 个, 无放回, 观察两个球的编号;

(2) 一盒中有编号为 1, 2, 3 的三个球, 依次随机地抽取 2 次, 每次取 1 个, 有放回, 观察两个球的编号;

(3) 某超市每天的营业时间为 7:00—22:00, 观察某天进入该超市的人数;

(4) 在以 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形内 (含边界) 随机取一点, 记录其坐标.

A4. 设 A,B,C 为 3 个随机事件, 请用事件的运算关系式表示:

(1) A,B,C 至少有 2 个发生;

(2) A,B,C 最多有 1 个发生;

(3) A,B,C 恰有 1 个不发生;

(4) A,B,C 至少有 1 个不发生.

A5. 设 A,B 为两个随机事件, 且 A,B 中至少有一个发生的概率为 0.9.

(1) 若 B 发生的同时 A 不发生的概率为 0.4, 求 $P(A)$;

(2) 若 $P(B)=0.6$, 求 A 发生的同时 B 不发生的概率.

A6. 设 A,B 为两个随机事件, 已知 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.4$, 在下列两种情况下分别求 $P(A\cup B)$ 和 $P(A\overline{B})$:

(1) A 与 B 互不相容;

(2) 当 B 发生时必有 A 发生.

A7. 设事件 A 与 B 互不相容, $P(A)=0.3$, $P(B)=0.5$, 求:

(1) A 与 B 至少有一个发生的概率;

(2) A 与 B 都不发生的概率;

(3) A 不发生的同时 B 发生的概率.

A8. 设 A,B 为两个随机事件, 已知 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.4$, $P(A\cup B)=0.6$, 求:

(1) $P(A\overline{B})$;

(2) $P(\overline{A}\,\overline{B})$;

(3) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

A9. 已知一宿舍有 6 位学生, 其中有 2 位为统计学专业. 从该宿舍随机选 2 位学生, 求:

(1) 至少有 1 位是统计学专业的概率;

(2) 最多有 1 位是统计学专业的概率.

A10. 同时掷两颗均匀的骰子,

(1) 求两颗骰子点数不同的概率;

(2) 求某一颗骰子点数是另一颗骰子点数 3 倍的概率;

(3) 已知 2 颗骰子的点数不同, 求某一颗骰子点数是另一颗骰子点数 3 倍的概率.

A11. 假设一个人出生的月份在一年的 12 个月是等概率的, 求一宿舍 6 位学生中至少有 2 人生日在同一个月的概率.

A12. 一袋中有 10 个球, 其中 8 个是红球. 每次摸一球, 共摸 2 次, 在有放回抽样与无放回抽样两种抽样方式下分别求:

(1) "两次均为红球" 的概率;

(2) "恰有 1 个红球" 的概率;

(3) "第 2 次是红球" 的概率.

A13. 在一个 30 人的班级中有两个 "王姓" 学生, 现将全班学生随机排成一排, 求:

(1) 两个 "王姓" 学生正好中间隔一个位置的概率;

(2) 两个 "王姓" 学生正好排在最中间的概率.

A14. 一个盒子中有 7 个球, 其中 2 个红球, 3 个黑球, 2 个白球. 每次摸一球 (无放回), 共摸 3 次, 求:

(1) 摸到的球恰是 1 红、1 黑、1 白的概率;

(2) 摸到的球全是黑球的概率;

(3) 第 1 次摸到红球、第 2 次摸到黑球且第 3 次摸到白球的概率.

A15. 编号为 $1,2,\cdots,9$ 的 9 辆车, 随机地停入编号为 $1,2,\cdots,9$ 的 9 个车位中. 当车号与车位编号一样时称该车配对, 求:

(1) 1 号车配对的概率;

(2) 1 号车配对而 9 号车不配对的概率.

A16. 依次将 5 个不同的球随机放入 3 个不同的盒子中, 盒子容量不限, 求 3 号盒子中恰好有两个球的概率.

A17. 设 A,B 为两个随机事件, 已知 $P(A)=0.5$, $P(B)=0.4$, $P(A\cup B)=0.6$, 求:

(1) $P(A|B)$;

(2) $P(B|A)$;

(3) $P(\overline{A}|\overline{B})$;

(4) $P(\overline{B}|\overline{A})$.

A18. 设 A,B 为两个随机事件, 已知 $P(A)=0.6$, $P(B|A)=0.4$, $P(A|B)=0.5$, 求:

(1) $P(AB)$;

(2) $P(B)$;

(3) $P(A\cup B)$.

A19. 设 A,B 为两个随机事件, 已知 $P(A)=0.7$, $P(\overline{B})=0.6$, $P(A\overline{B})=0.5$, 求:

(1) $P(A|A\cup B)$;

(2) $P(A|\overline{A}\cup B)$;

(3) $P(AB|A\cup B)$.

A20. 有甲、乙两个盒子, 甲盒中有 3 个红球、2 个白球, 乙盒中有 2 个红球、4 个白球.

(1) 现任选一个盒子, 从中无放回地取 2 球, 求取到的是 1 个红球和 1 个白球的概率;

(2) 从甲盒中取 1 球放入乙盒, 从乙盒中取 1 球, 求从乙盒中取到的球是红球的概率;

(3) 从甲盒中取 1 球放入乙盒, 从乙盒中无放回地取 2 球, 求取到的球是 1 个红球和 1 个白球的概率.

A21. (垃圾邮件过滤) 某人的邮箱收到正常邮件的概率为 0.4, 收到垃圾邮件的概率为 0.6, 正常邮件里包含词语 "免费" 的概率为 0.005, 垃圾邮件里包含词语 "免费" 的概率为 0.1. 现在此人设置把含有词语 "免费" 的邮件自动过滤到垃圾箱中, 求过滤到垃圾箱中的邮件确实是垃圾邮件的概率.

A22. 某公司从甲、乙、丙三家工厂购进同一型号产品, 数量之比为 6:5:4. 已知三家工厂产品的优质品率分别为 85%, 90%, 80%. 若从全部产品中随机取一件, 发现是优质品, 求该产品来自工厂甲、乙、丙的概率分别是多少, 判断最有可能由哪家工厂生产.

A23. 一架子上有 4 把枪, 其中 3 把是调试好的, 1 把未调试. 设某人用调试好的枪射击时命中率为 60%, 用未调试的枪射击时命中率为 5%. 此人从 4 把枪中随机取一把进行射击.

(1) 求命中的概率;

(2) 已知此人命中了, 求取到的是未调试的枪的概率.

A24. 在某一时间点对某证券营业点进行统计. 得知入市时间在 1 年以内的股民赢、平、亏的概率分别为 10%, 20%, 70%; 入市时间在 1 年及以上且不大于 4 年的股民赢、平、亏的概率分别为 20%, 30%, 50%; 入市时间大于 4 年的股民赢、平、亏的概率分别为 50%, 30%, 20%. 入市时间少于 1 年、1 年及以上且不大于 4 年、大于 4 年的股民数分别占 40%, 40%, 20%. 现从该营业点随机找一股民,

(1) 求其有赢利的概率;

(2) 若已知其亏损了, 求他为新股民 (入市时间在 1 年以内) 的概率.

A32. 连续抛掷一枚硬币, p 表示每次出现正面的概率, 记

$$A_i = \{\text{首次出现正面在第 } i \text{ 次抛掷}\}, \quad i=1,2,\cdots,$$
$$B_j = \{\text{首次出现连续两次正面在第 } j-1 \text{ 次抛掷和第 } j \text{ 次抛掷}\}, \quad j=2,3,\cdots.$$

(1) 求 $P(A_i)$ 及 $P(B_4)$, $i=1,2,\cdots$;

(2) 求 $P(B_4|A_1)$;

(3) 求 $P(A_1|B_4)$.

A33. 已知一批照明灯管使用寿命大于 1 000 h 的概率为 95%, 大于 2 000 h 的概率为 30%, 大于 4 000 h 的概率为 5%.

(1) 已知一个灯管用了 1 000 h 没有坏, 求其使用寿命大于 4 000 h 的概率;

(2) 取 10 个灯管独立地装在一大厅内, 过了 2 000 h, 求至少有 3 个损坏的概率.

A34. 某玩家独立地向一目标物扔飞镖, 设他命中目标物的概率为 0.05, 问他需要扔多少次才能使至少一次命中目标物的概率超过 0.5?

(B)

B1. 设 A,B,C 为三个随机事件, $P(A)=P(B)=0.3$, $P(C)=0.4$, 且当 A 发生时 C 必然发生, B 与 C 互不相容, 求:

(1) C 发生的同时 A 不发生的概率;

(2) A 与 B 至少有一个发生的概率;

(3) A,B,C 都不发生的概率.

B2. 在某卫视的一档节目中, 有这样一个项目: 舞台现场摆放了 50 张脸谱, 嘉宾从中随机挑选两张脸谱, 电脑将两张脸谱进行合成产生一张新的脸谱, 挑战者要根据合成的脸谱, 将原先的两张脸谱找出来. 如果靠猜, 求他能够猜中的概率.

B3. 设一社区订 A, B, C 报的家庭分别占 50%, 30%, 40%; 且已知一家庭在订了 A 报的条件下再订 B 报的概率为 20%, 在订了 C 报的条件下再订 A 报或 B 报的概率为 60%. 随机找一家庭, 求该家庭至少订 A, B, C 报中的一种的概率.

B4. 某企业中有 45% 为女职工, 10% 的职工在管理 (技术、质量、行政) 岗位, 5% 的职工为管理岗位的女职工. 在该企业中随机找一位职工.

(1) 已知该职工为女职工, 求该职工在管理岗位的概率;

(2) 已知该职工在管理岗位, 求该职工为男职工的概率.

B5. 某产品 12 个一箱, 成箱出售, 某人购买时随机从中取 2 个检查, 如果没有发现次品就买下. 假设一箱中有 0 个、1 个、2 个次品的概率分别为 0.8, 0.15, 0.05, 求他买下的一箱中的确没有次品的概率.

B6. 有两组同类产品, 第一组有 30 件, 其中有 10 件为优质品; 第二组有 20 件, 其中有 15 件为优质品. 今从两组中任选一组,

然后从该组中任取 2 次 (每次取 1 件, 无放回抽样).

(1) 求第一次取到的是优质品的概率;

(2) 在已知第 1 次取到的是优质品的条件下, 求第 2 次取到的不是优质品的概率.

B7. 4 个独立元件组成一个系统, 第 i 个元件正常工作的概率为 p_i, $i=1,2,3,4$, 且已知至少有 3 个元件正常工作时系统工作正常.

(1) 求系统正常工作的概率 α;

(2) 在系统正常工作的条件下求 4 个元件均正常工作的概率 β;

(3) 对系统独立观察 3 次, 求系统恰有 2 次正常工作的概率 γ.

B8. 设某地出现雾霾的概率为 0.4, 在雾霾天, 该地居民独立地以 0.2 的概率戴口罩; 在非雾霾天, 该地居民独立地以 0.01 的概率戴口罩.

(1) 在该地随机选一位居民, 求其戴口罩的概率;

(2) 若在该地同时选 3 位居民, 求至少有一位居民戴口罩的概率.

B9. 某班有 n 个士兵, 每个人各有一支枪. 这些枪在外形上是完全一样的. 在一次夜间紧急集合中每个士兵随机取走一支枪, 求至少有一个士兵拿到自己的枪的概率.

B10. 飞机坠落在 A, B, C 三个区域中一个, 营救部门判断其概率分别为 0.7, 0.2, 0.1. 用直升机搜索这些区域, 若有残骸, 残骸被发现的概率分别为 0.3, 0.4, 0.5. 若已用直升机搜索过 A, B 两个区域, 均未发现残骸, 求在这样的搜救现状下飞机坠落在 C 区域的概率.

B11. 甲、乙、丙三人按照下列规则比赛: 第一局甲、乙参加丙轮空, 优胜者与丙进行第二轮比赛, 失败者轮空, 一直进行到有人连胜两局为止. 连胜两局者称为整场比赛优胜者. 若甲、乙、丙在每局比赛中获胜的概率为 0.5, 求甲、乙、丙成为比赛优胜者的概率分别是多少?

证明 由分布函数的性质知 $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, [illegible] 因此当 $y < 0$ 时, $P\{Y \leqslant y\} = 0$; 当 $y \geqslant 1$ 时, $P\{Y \leqslant y\} = 1$. 下面考虑 $F(x)$ 的反函数. 由于 $y = F(x)$ 不一定严格单调递增, 即对某一个 y, 可能有不止一个 x 与它对应, 故先定义以下函数: 对任意 $0 \leqslant y \leqslant 1$, 令

$$F^{-1}(y) = \sup\{x : F(x) < y\}$$

为 $F(x)$ 的反函数, 称之为 $F(x)$ 的广义反函数. 由上确界的定义和分布函数的性质, 易得如上定义的广义反函数满足以下性质:

(1) $F^{-1}(y)$ 是 y 的单调不减函数;

(2) $F(F^{-1}(y)) \leqslant y$, 且若 $F(x)$ 在 $x = F^{-1}(y)$ 处连续, 则 $F(F^{-1}(y)) = y$;

(3) $F^{-1}(y) \leqslant x$ 的充要条件为 $y \leqslant F(x)$.

故当 $0 \leqslant y < 1$ 时,

$$\begin{aligned} P\{Y \leqslant y\} &= P\{F(X) \leqslant y\} = P\{X \leqslant F^{-1}(y)\} \\ &= F(F^{-1}(y)) = y. \end{aligned}$$

因此 $Y \sim U(0,1)$.

例 2.5.6 的结论为产生某一连续型随机变量分布的随机数带来了启发.

例如, 设随机变量 $X \sim E(3)$, 它的密度函数及分布函数为

$$f(x) = \begin{cases} 3\mathrm{e}^{-3x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-3x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

设 $Y = F(X) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-3X}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$ 则 $Y \sim U(0,1)$, 且

$$X = -\frac{1}{3}\ln(1 - Y), \quad 0 < Y < 1.$$

而均匀分布 $U(0,1)$ 的随机数可由 RAND( ) 产生, 所以参数为 3 的指数分布的随机数可由 $-\frac{1}{3}\ln(1 - \mathrm{RAND}(\ ))$ 产生.

思考题二

1. 取值充满一区间的随机变量一定是连续型随机变量吗?
2. 若随机变量 X 的概率分布律为

X	0	1
p	0.2	0.8

A14. 设某种产品的寿命 X (单位: 年) 服从参数为 0.2 的指数分布.

(1) 求 X 的分布函数;

(2) 求 $P\{X>5\}$;

(3) 求 $P\{X\leqslant 10|X>5\}$.

A15. 设随机变量 $X\sim N(1,4)$.

(1) 求 $P\{X\leqslant 0\}$ 和 $P\{|X-1|\leqslant 2\}$;

(2) 若 $P\{X>a\}=P\{X<a\}$, 求 a;

(3) 求 $P\{|X|\leqslant 2\}$.

A16. 设随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$. 若要求 $P\{0\leqslant X\leqslant 4\}\geqslant 0.95$, 问 σ 最大取何值?

A17. 设随机变量 X 的概率分布律为 $P\{X=-1\}=0.3$, $P\{X=0\}=0.1$, $P\{X=1\}=0.2$, $P\{X=2\}=0.4$. 令 $Y=2X-1$, $Z=X^2$.

(1) 分别求 Y, Z 的概率分布律;

(2) 求 Z 的分布函数.

A18. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}, & 1<x<3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

在下面三种情况下分别求随机变量 Y 的密度函数:

(1) $Y=2X$;

(2) $Y=2-X$;

(3) $Y=X^2$.

A19. 设随机变量 $X\sim N(1,4)$, 问 $Y=\dfrac{X-1}{2}$ 和 $Z=2-X$ 的概率分布分别是什么?

(B)

B1. 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 这 7 个数中随机抽取 3 个数 (无放回抽样), 并将其从小到大排列, 设排在中间的数为 X, 求 X 的概率分布律.

B2. 某电脑小游戏要依次通过 3 关, 游戏规定过第 1 关和第 2 关各得 1 分, 过第 3 关可得 2 分; 并且规定若其中一关没有通过, 后续关卡仍可进行, 但无论通关与否均不得分. 各个关卡分数累计为游戏总得分. 假设各个关卡的进行是相互独立的 (即各个关卡是否通过是相互独立的), 且一玩家通过各关的概率均为 20%.

(1) 写出该玩家的游戏总得分 X 的概率分布律;

(2) 求该玩家的游戏总得分大于 2 的概率;

(3) 已知该玩家的游戏总得分不低于 2, 求他得 4 分的概率.

B3. 一袋中有 6 个球, 其中 3 个是红球, 2 个是白球, 1 个是黑球. 从中摸 2 次, 每次摸 1 个球 (无放回抽样). 设摸到每一球的概率相等, 记 X 为摸到的红球个数, 写出 X 的概率分布律.

B4. 有人买一种数字型体育彩票, 每一注号码中大奖的概率为 10^{-7}.

(1) 若每期买 1 注, 共买了 n 期, 求他没有中大奖的概率;

(2) 若每期买 10 注 (号码不同), 共买了 n 期, 求他没有中大奖的概率.

B5. 某医院男婴的出生率为 0.51, 如果在该医院随机找 3 名新生儿, 求:

(1) 至少有 1 名男婴的概率;

(2) 恰有 1 名男婴的概率;

(3) 第 1, 第 2 名是男婴, 第 3 名是女婴的概率;

(4) 第 1, 第 2 名是男婴的概率.

B6. 一系统由 5 个独立的同类元件组成, 每个元件正常工作的概率为 0.8, 求:

(1) 恰有 3 个元件正常工作的概率;

(2) 至少有 4 个元件正常工作的概率;

(3) 至多有 2 个元件正常工作的概率.

B7. 一车辆从 A 地到 B 地要经过 3 个特殊地段, 经过这 3 个地段时车辆发生故障的概率分别为 p_1, p_2, p_3. 设在其他地段车辆不发生事故, 且记 X 为车辆从 A 地到 B 地发生故障的地段数, Y 为首次发生故障时已通过的特殊地段数 (若没有发生故障, 则记 $Y = 3$), 分别写出 X 和 Y 的概率分布律.

B8. 从一批不合格率为 $p(0 < p < 1)$ 的产品中随机抽查产品, 如果查到不合格品就停止检查, 且最多检查 5 件产品. 设停止时已检查了 X 件产品, 求:

(1) X 的概率分布律;

(2) $P\{X \leqslant 2.5\}$.

B9. 设银行自动取款机在单位时间内服务的顾客数 X 服从参数为 1 的泊松分布.

(1) 求单位时间内至少有 2 位顾客接受服务的概率;

(2) 若已知单位时间内至少有 2 位顾客接受服务, 求至多有 3 位顾客接受服务的概率.

B10. 设某地每年生吃鱼胆的人数 X 服从参数为 10 的泊松分布, 吃鱼胆而中毒致死的人数 Y 服从参数为 0.5 的泊松分布, 求明年该地:

(1) 至少有 2 人生吃鱼胆的概率;

(2) 没有人因生吃鱼胆致死的概率.

B11. 某公交车站单位时间内候车人数服从参数为 λ 的泊松分布.

(1) 若已知单位时间内至少有 1 人候车的概率为 $(1 - e^{-4.5})$, 求单位时间内至少有 2 人候车的概率;

(2) 若 $\lambda = 3.2$, 且已知至少有 1 人在此候车, 求该车站只有他 1 人候车的概率.

B12. 设某手机在早上 9:00 至晚上 9:00 的任意长度为 t (单位: min) 的时间区间内收到的短信数 X 服从参数为 λt 的泊松分布, $\lambda = \dfrac{1}{20}$, 且与时间起点无关.

(1) 求 10:00 到 12:00 期间恰好收到 6 条短信的概率;

(2) 已知在 10:00 到 12:00 期间至少收到 5 条短信, 求在该时段恰好收到 6 条短信的概率.

B13. 某大学每年 5 月份组织教职工体检, 根据以往的情况, 通过体检发现千分之一的被检者患有重大疾病. 已知有 3 000 人参加今年的体检, 求至少有 2 人被检出重大疾病的概率的近似值 (用泊松分布来近似计算).

B14. 一袋中有 10 个球, 编号为 $0, 1, \cdots, 9$.

(1) 采用无放回抽样取 3 次, 每次取 1 球, X 表示所取球的号码大于 6 的个数, 求 X 的概率分布律;

(2) 采用有放回抽样取 3 次, 每次取 1 球, Y 表示所取球的号码为偶数的个数, 求 Y 的概率分布律;

(3) 采用有放回抽样取球, 直到取到号码 9 为止, Z 表示取球次数, 求 Z 的概率分布律;

(4) 采用有放回抽样取球, 求第 5 次恰好取到第 3 个奇数号码球的概率.

B15. 小王租到一所房子, 房东给了他 5 把钥匙, 其中只有一把能打开大门. 计算在以下两种方式下, 他打开大门所需的试钥匙次数的概率分布律:

(1) 每次都从全部 5 把钥匙中任选一把试开;

(2) 每次试开失败后, 将该把钥匙单独放置, 从剩余的钥匙中任选一把试开.

B16. 设随机变量 X 具有以下性质:

$$\text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ 时}, \ P\{0 \leqslant X \leqslant x\} = \frac{x}{2};$$

$$\text{当 } 2 \leqslant x \leqslant 3 \text{ 时}, \ P\{2 \leqslant X \leqslant x\} = \frac{x-2}{2}.$$

(1) 写出 X 的分布函数;

(2) 求 $P\{X \leqslant 2.5\}$.

B17. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} c(4-x^2), & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$;

(3) 求 $P\{-1 < X < 1\}$;

(4) 对 X 独立观察 5 次, 求事件 $\{-1 < X < 1\}$ 恰好发生 2 次的概率.

B18. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ax^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ bx, & 1 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

(1) 求常数 a, b;

(2) 求 X 的密度函数 $f(x)$;

(3) 求 $P\{0.5 < X < 1.5\}$.

B19. 已知在早上 7:00—8:00 有两班车从 A 校区到 B 校区, 出发时间分别是 7:30 和 7:50, 一学生在 7:20—7:45 随机到达车站乘这两班车.

(1) 求该学生等车时间小于 10 min 的概率;

(2) 求该学生等车时间大于 5 min 且小于 15 min 的概率;

(3) 已知该学生等车时间大于 5 min 的条件下, 求他能赶上 7:30 这班车的概率.

B20. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\mu = 5, \sigma = 1$. 求:

(1) $P\{X > 2.5\}$;

(2) $P\{X < 3.52\}$;

(3) $P\{4 < X < 6\}$;

(4) $P\{|X - 5| > 2\}$.

B21. 设某人的年收人扣除日常花费后的余额 (单位: 万元) X 服从正态分布 $N(6.5, 1)$, 且往年没有积蓄, 也不打算借贷, 今年他计划至少花 7 万元买家电, 求他能实现自己计划的概率.

B22. 设一地区的青年男子身高 (单位: cm) X 服从正态分布 $N(170, 5.0^2)$. 现在该地区随机找一青年男子测身高, 求:

(1) 身高大于 170 cm 的概率;

(2) 身高大于 165 cm 且小于 175 cm 的概率;

(3) 身高小于 172 cm 的概率.

B23. 设某群体的 BMI (体重指数) 值 (单位: kg/m^2) $X \sim N(22.5, 2.5^2)$. 医学研究发现身体肥胖者患高血压的可能性增大: 当 $X \leqslant 25$ 时, 患高血压的概率为 10%; 当 $25 < X \leqslant 27.5$ 时, 患高血压的概率为 15%; 当 $X > 27.5$ 时, 患高血压的概率为 30%.

(1) 从该群体中随机选出 1 人, 求他患高血压的概率;

(2) 若他患有高血压, 求他的 BMI 值超过 25 的概率;

(3) 随机独立地选出 3 人, 求至少有 1 人患高血压的概率.

B24. 设系统电压 (单位: V) 在小于 200, 在区间 $[200, 240]$ 上和超过 240 这三种情况下, 系统中某种电子元件不能正常工作的概率分别为 0.1, 0.001, 0.2. 设系统电压 X 服从 $N(220, 25^2)$.

(1) 求该电子元件不能正常工作的概率 α;

(2) 若该电子元件不能正常工作, 求此时系统电压超过 240 V 的概率 β;

(3) 设某系统有 3 个这种元件, 且若至少有 2 个正常时系统才运行正常, 求该系统运行正常的概率 θ.

B25. 设一高速公路某处双休日一天车流量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 有 30% 的天数车流量小于 12 800 辆, 有 95% 的天数车流量大于 10 000 辆, 求 μ, σ.

B26. 设随机变量 X 服从 $N(15, 4)$, X 落在区间 $(-\infty, x_1]$, $(x_1, x_2]$, $(x_2, +\infty)$ 中的概率之比为 50:34:16, 求 x_1, x_2 的值.

B27. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = a \cdot e^{-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(1) 求常数 a; (2) 求 $P\left\{X > \frac{1}{2}\right\}$.

B28. 设银行某一柜台一位顾客的服务时间 (单位: min) 服从参数为 $\lambda = \frac{1}{8}$ 的指数分布. 若在顾客 A 到达时恰好有 1 人正在接受服务, 且无其他人排队, 设 A 的等待时间为 X.

(1) 求 X 的密度函数;

(2) 求 A 等待时间超过 10 min 的概率;

(3) 求等待时间大于 8 min 且小于 16 min 的概率.

B29. 设甲、乙两厂生产的同类型产品寿命 (单位: 年) 分别服从参数为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{6}$ 的指数分布, 将两厂的产品混在一起, 其中甲厂的产品数占 40%. 现从这批混合产品中随机取一件.

(1) 求该产品寿命大于 6 年的概率;

(2) 若已知取到的是甲厂产品, 在已用了 4 个月没有坏的条件下, 求其用到 1 年还不坏的概率;

(3) 在该产品已用了 4 个月没有坏的条件下, 求其用到 1 年还不坏的概率.

B30. 以 X 表示某商店早晨开门后直到第一个顾客到达的等待时间 (单位: min), X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.2x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(1) 求 X 的密度函数 $f(x)$;

(2) 求 $P\{5 < X < 10\}$;

(3) 求某一周 (7 天) 至少有 6 天等待时间不超过 5 min 的概率.

B31. 设一批电子元件寿命 X (单位: h) 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 0.01e^{-0.01x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

某人买了 3 个元件试用, 若至少有 2 个寿命大于 150 h, 则下次再买此类元件.

(1) 求这 3 个元件中恰好有 2 个寿命大于 150 h 的概率;

(2) 求这个人会再买的概率.

B32. 某次游戏向每个玩家发 5 个球, 向目标投掷, 投中 2 次就结束投球. 若每次投中的概率均为 $p = 0.7$, 且每次投掷是相互独立的. 设 X 为结束时的投球次数, 规定当 $X = 2$ 时得 10 分, 当 $X = 3$ 时得 8 分, 当 $X \geqslant 4$ 时得 2 分, 记 Y 为所得分数, 写出 Y 的概率分布律.

B33. 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}c(4-x^2), & -1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) 设 $Y=3X$, 求 Y 的密度函数;

(3) 设 $Z=|X|$, 求 Z 的分布函数及密度函数.

B34. 设在时间区间 $(0,t]$ 内进入某商店的顾客数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布, 且设第 1 个顾客到达时间为 T.

(1) 求 T 的分布函数;

(2) 求 $P\{T>t_0+t|T>t_0\}$, 其中 $t>0, t_0>0$.

B35. 从区间 $(0,1)$ 上随机取一数 X, 记 $Y=X^n$ ($n>1$, n 为整数), 求 Y 的密度函数.

B36. 设随机变量 X 服从 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布, $Y=\cos X$, 求 Y 的分布函数.

B37. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 $Y=X^2$ 的密度函数.

B38. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且已知 $P\{X<1\}=\dfrac{1}{3}$.

(1) 求常数 a,b;

(2) 设 $Y=\sqrt{X}$, 求 Y 的密度函数 $f_Y(y)$.

B39. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, 记 $Y=\mathrm{e}^X$, $Z=\ln|X|$.

(1) 求 Y 的密度函数;

(2) 求 Z 的密度函数.

故

$$f_M(t)=\begin{cases}4\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^3, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

(2) 设系统寿命为 T, 则 $T=\min\{\max\{X_1,X_2\},X_3,X_4\}$. 那么对 $t_0>0$ 而言, 有

$$\begin{aligned}P\{T>t_0\}&=P\{\min\{\max\{X_1,X_2\},X_3,X_4\}>t_0\}\\&=P\{\max\{X_1,X_2\}>t_0\}\cdot P\{X_3>t_0\}\cdot P\{X_4>t_0\}\\&=(1-P\{X_1\leqslant t_0,X_2\leqslant t_0\})\cdot e^{-2\lambda t_0}\\&=[1-(1-e^{-\lambda t_0})^2]\cdot e^{-2\lambda t_0}\\&=e^{-3\lambda t_0}(2-e^{-\lambda t_0}).\end{aligned}$$

思考题三

1. 以下说法是否正确, 若不正确, 请给出正确的说法:
   若已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布, 就决定了 X 及 Y 的边际分布; 反之, 若已知 X 及 Y 的边际分布, 就可决定 (X,Y) 的联合分布.
2. 设随机变量 X 与 Y 同分布, 以下说法是否正确:
   (1) $P\{X=Y\}=1$;
   (2) $P\{X+Y=2X\}=1$;
   (3) X 与 Y 有相同的分布函数;
   (4) X 与 Y 可以有不同的分布函数.
3. 以下说法是否正确:
   设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}f_1(x,y), & (x,y)\in D,\\ f_2(x,y), & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

   则 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{y}f_1(u,v)dv, & (x,y)\in D,\\ \int_{-\infty}^{x}du\int_{-\infty}^{y}f_2(u,v)dv, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

4. 设 (X,Y) 为二维连续型随机变量, 以下等式是否正确:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}x = 1$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y = 1$;

(3) $F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{x} f_{Y|X}(y|u)\mathrm{d}u$;

(4) $F_{Y|X}(0|2) = \int_{-\infty}^{0} f_{Y|X}(0|2)\mathrm{d}y$.

5. 以下说法是否正确:

当 (X,Y) 为二维离散型随机变量时, 若存在点 (x_0,y_0) 使 $P\{X=x_0,Y=y_0\} \neq P\{X=x_0\}\cdot P\{Y=y_0\}$, 则 X 与 Y 不独立;

当 (X,Y) 为二维连续型随机变量时, 若存在一点 (x_0,y_0) 使 $f(x_0,y_0) \neq f_X(x_0)\cdot f_Y(y_0)$, 则 X 与 Y 不独立.

习题三 (A)

A1. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1	2	3
0	0.1	0.1	$2c$	0.1
1	0	0.1	0.1	0
2	c	0	0	0.2

(1) 求常数 c;

(2) 求 $P\{X \leqslant 1, Y \geqslant 1\}$;

(3) 分别求 X 和 Y 的边际分布律.

A2. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
0	0.1	a	0.1
1	0	0.1	$2a$
2	b	0	0.2

分别在下列条件下求常数 a 和 b:

(1) $P\{X \leqslant 1\} = 0.6$;

(2) $P\{X=0 \mid Y=0\} = 0.5$;

(3) $P\{X \leqslant 1, Y \geqslant 1\} = 0.35$.

A3. 有两个袋子均放着 3 个红球 2 个白球, 今从两个袋子中同时各摸出 1 个球互换 (设每个袋子摸到每个球的概率相等). 记

X,Y 分别为两个袋子中互换球后的红球个数, 求 (X,Y) 的联合分布律及 X 的边际分布律.

A4. 盒子中有 3 个红球和 2 个白球, 取 2 次球, 每次取 1 个. 设

$$X=\begin{cases}1, & \text{若第 1 次取到红球},\\ 0, & \text{若第 1 次取到白球},\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & \text{若第 2 次取到红球},\\ 0, & \text{若第 2 次取到白球},\end{cases}$$

分别求在无放回抽样和有放回抽样这两种情况下 (X,Y) 的联合分布律及 X 和 Y 的边际分布律.

A5. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X	Y	
	0	1
0	0.3	a
1	b	0.2

且已知事件 $\{X=0\}$ 与事件 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 求常数 a,b 的值.

A6. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X	Y		
	-1	0	1
1	a	0.1	b
2	0.1	0.1	c

且已知 $P\{Y\leqslant 0|X<2\}=0.5$, $P\{Y=1\}=0.5$, 求 a,b,c 的值及 X,Y 的边际分布律.

A7. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X	Y		
	0	1	2
0	0.1	0.1	0
1	0	0.2	0.2
2	0.2	0	0.2

(1) 求给定 $\{X=1\}$ 的条件下 Y 的条件分布律;

(2) 求给定 $\{Y=1\}$ 的条件下 X 的条件分布律.

A8. 设随机变量 X,Y 的概率分布律分别为

X	0	1
p	0.4	0.6

Y	0	1	2
p	0.2	0.5	0.3

且已知 $P\{X=0,Y=0\}=P\{X=1,Y=2\}=0.2$.

(1) 写出 (X,Y) 的联合分布律;

(2) 写出给定 $\{X=0\}$ 的条件下 Y 的条件分布律.

A9. 将一枚均匀的骰子抛 2 次, 记 X 为第 1 次出现的点数, Y 为 2 次点数的最大值.

(1) 求 (X,Y) 的联合分布律及边际分布律;

(2) 写出给定 $\{Y=6\}$ 的条件下 X 的条件分布律.

A10. 设一大型设备单位时间内发生的故障数 X 具有概率分布律

X	0	1	2
p	0.6	0.3	0.1

每次故障以概率 p 带来损失 a 万元. 设 Y 为该设备在单位时间内的损失 (单位: 万元).

(1) 求 (X,Y) 的联合分布律;

(2) 在该设备仅发生 1 次故障的条件下, 求 Y 的条件分布律.

A11. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X	Y		
	0	1	2
0	0.1	0.1	0
1	0	0.2	0.2
2	0.2	0	0.2

记 $F(x,y)$, $F_X(x)$ 分别是 (X,Y) 的联合分布函数和 X 的边际分布函数.

(1) 求 $F(0,1)$, $F(1,1.5)$, $F(2.1,1.1)$;

(2) 求 $F_X(x)$.

A12. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的边际分布函数

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 0.3, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 0.4, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$$

且已知 $P\{X=1,Y=0\}=0.1$.

(1) 求 (X,Y) 的联合分布律;

(2) 求给定 $\{Y=0\}$ 的条件下 X 的条件分布函数.

A13. 设 A,B 为两随机事件, 已知 $P(A)=0.3$, $P(B|\overline{A})=0.5$, $P(B)=0.4$. 引入随机变量 X,Y, 分别为

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的联合分布律;

(2) 求 X 的边际分布函数;

(3) 求给定 $\{X=1\}$ 的条件下 Y 的条件分布函数.

A14. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} c+xy, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) 求 $P\{X\leqslant 0.5,Y\leqslant 0.5\}$;

(3) 求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$;

(4) 求 $P\{X>0.5\}$.

A15. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} x, & 0<x<1,0<y<2,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 分别求 X 与 Y 的边际密度函数;

(2) 求 $P\{Y\leqslant 2X\}$.

A16. 二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} c(x-1), & 1<x<2,x<y<4-x,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) 分别求 X 与 Y 的边际密度函数 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$.

A17. 二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 分别求 X 与 Y 的边际密度函数 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$;

(2) 求条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$;

(3) 给定 $\{X=x\}$ 的条件下, Y 的条件分布是均匀分布吗? 为什么?

A18. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x+y}{4}, & 0<x<1,0<y<2,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 分别求 X 与 Y 的边际密度函数;

(2) 分别求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$;

(3) 分别求 $P\{X\leqslant 0.5|Y=0.5\}$ 和 $P\{Y\leqslant 0.5|X=0.5\}$.

A19. 设 (X,Y) 为二维随机变量, X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} \lambda^2xe^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases}$$

其中 $\lambda>0$. 当 $x>0$ 时, 给定 $\{X=x\}$ 的条件下 Y 的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}e^{-y/x}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的联合密度函数;

(2) 求当 $x>0$ 时, 给定 $\{X=x\}$ 的条件下 Y 的条件分布函数;

(3) 求 $P\{Y>1|X=1\}$.

A20. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5}{4}x, & y^2<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 Y 的边际密度函数 $f_Y(y)$;

(2) 求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$;

(3) 求 $P\left\{X>\dfrac{1}{2}\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right\}$.

A21. 设随机变量 (X,Y) 服从以 $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ 为顶点的三角形区域上均匀分布.

(1) 求 (X,Y) 的联合密度函数;

(2) 求 $P\{X+Y>2\}$;

(3) 求 $P\{X<1\}$.

A22. 在区间 $(0,1)$ 内随机取一数 X, 在 $\{X=x\}$ 的条件下再在区间 $(x,1)$ 内随机取一数 Y.

(1) 求 (X,Y) 的联合密度函数;

(2) 求给定 $\{Y=y\}(0<y<1)$ 的条件下 X 的条件密度函数.

A23. 设二维随机变量 (X,Y) 服从分布 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$, 其中 $\mu_1=0$, $\mu_2=1$, $\sigma_1^2=1$, $\sigma_2^2=2$, $\rho=-\dfrac{1}{2}$.

(1) 写出 X,Y 各自的边际密度函数;

(2) 写出给定 $\{X=0\}$ 的条件下 Y 的条件密度函数;

(3) 求 $P\{Y\leqslant 1|X=0\}$.

A24. 二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X	Y		
	0	1	2
0	0.1	0.1	0.1
1	0.2	0.2	0.2
2	0.1	0	0

判断 X 与 Y 是否相互独立, 并说明理由.

A25. 二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X	Y		
	0	1	2
0	0.1	0.2	0.1
1	0.05	0.1	0.05
2	a	b	c

已知 X 与 Y 相互独立, 求 a, b, c.

A26. 二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为下列各式时, 判断对应的 X 与 Y 是否相互独立, 并说明理由:

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x+y}{4}, & 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}xy, & 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x}{4}, & 0<x<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

A27. 在半圆 $D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1, x>0\}$ 内随机投点 A, 设 A 点的坐标为 (X,Y).

(1) 求 X 的边际密度函数 $f_X(x)$;

(2) 求 $P\left\{X<\dfrac{1}{2}\right\}$;

(3) X 与 Y 相互独立吗? 为什么?

A28. 设二维随机变量 (X,Y) 服从分布 $N(0,1;2,4;0)$, 分别求 X 与 Y 的边际密度函数, 并判断 X 与 Y 是否相互独立.

A29. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}[f_1(x,y)+f_2(x,y)],$$

其中 $f_1(x,y)$ 与 $f_2(x,y)$ 分别为二维正态变量 (X_1,Y_1) 与 (X_2,Y_2) 的联合密度函数, 且已知 $(X_i,Y_i)(i=1,2)$ 的边际分布均为标准正态分布.

(1) 求 X,Y 的边际密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$;

(2) 当 (X_i,Y_i) 的分布中的参数 $\rho_i=0(i=1,2)$ 时, X 与 Y 相互独立吗?

A30. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X\sim B(1,0.4)$, $Y\sim B(2,0.4)$. 令 $Z=X+Y$, 求 Z 的概率分布律.

A31. 某人连续参加 2 场比赛, 第 1, 2 场比赛可得的奖金数分别为 X,Y, 且已知 X 的概率分布律为

X	0	1000	5000
p	0.5	0.3	0.2

Y 具有密度函数 $f(y)$, X 与 Y 相互独立, 求此人可得的奖金总数 $Z=X+Y$ 的密度函数.

A32. 设随机变量 X,Y 相互独立, 且分别具有概率分布律

X	0	1	2
p	0.2	0.3	0.5

Y	1	2	3
p	0.2	0.4	0.4

设 $Z=X+Y$, $M=\max\{X,Y\}$, $N=\min\{X,Y\}$, 分别求 Z,M,N 的概率分布律.

A33. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X	Y		
	0	1	2
1	0.2	0.1	0.3
2	0.2	0	0.2

设 $Z=XY$, $M=\max\{X,Y\}$, $N=\min\{X,Y\}$, 分别求 Z,M,N 的概率分布律.

A34. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从参数为 1 的指数分布. 设 $Z=X+Y$, $M=\max\{X,Y\}$, $N=\min\{X,Y\}$, 分别求 Z,M,N 的密度函数.

A35. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从标准正态分布.

(1) 令 $Z=X+Y$, 求 Z 的密度函数;

(2) 求 $P\{\min\{X,Y\}<1\}$;

(3) 求 $P\{\max\{X,Y\}<1\}$.

A36. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 0<x<2, 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记 $Z=2X-Y$, 求 Z 的密度函数.

A37. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从分布 $B(1,p)$ $(0<p<1)$, 定义

$$Z=\begin{cases}1, & X+Y=1,\\ 0, & X+Y\neq 1.\end{cases}$$

求 (X,Z) 的联合分布律.

A38. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$, Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

且 X 与 Y 相互独立. 记 $M=\max\{X,Y\}$, $N=\min\{X,Y\}$, 分别求 M,N 的密度函数.

(B)

B1. 某公司为职工订报, 每位职工可以从 A, B, C 三种报中任订一种, 已知已经有 $\frac{2}{3}$ 的女职工决定订 A 报, 有 $\frac{3}{5}$ 的男职工决定订 B 报, 余下的人在三种报中随机选一种. 公司男、女职工各占一半, 从该公司中随机找一职工, 记

$$X=\begin{cases}1, & \text{此人为女职工},\\ 0, & \text{此人为男职工},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & \text{此人订 A 报},\\ 2, & \text{此人订 B 报},\\ 3, & \text{此人订 C 报}.\end{cases}$$

(1) 写出 (X,Y) 的联合分布律;

(2) 求 Y 的边际分布律;

(3) 求给定 $\{Y=1\}$ 的条件下 X 的条件分布律.

B2. 设某路段单位时间内发生的交通事故数 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 其中事故原因是超速的概率为 0.1. 记因超速引发的事故数为 Y.

(1) 求 (X,Y) 的联合分布律;

(2) 求 Y 的边际分布律.

B3. 设 (X,Y) 为二维随机变量, 已知 $P\{X=0,Y=0\}=P\{X=1,Y=1\}=0.1$. 现知 (X,Y) 落在 $D=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$ 的任一小区域内的概率与该小区域面积成正比, 且 (X,Y) 只能落在点 $(0,0)$, $(1,1)$ 及 D 内, 求 (X,Y) 的联合分布函数.

B4. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}c(y-x), & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) 求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$;

(3) 求 $P\{X<0.5\}$.

B5. 有一件工作需要甲、乙两人接力完成, 完成时间不超过 4 h. 设甲先干了 X h, 再由乙完成, 加起来共用 Y h. 若 $X\sim U(1,2)$, 给定 $\{X=x\}$ 的条件下, Y 的条件密度函数

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{2(4-y)}{(3-x)^2}, & x+1<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的联合密度函数 $f(x,y)$ 及 $P\{Y<3\}$;

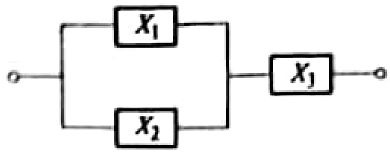
(2) 求 Y 的边际密度函数;

(3) 已知两人完成工作共花了 3 h, 求甲的工作时间不超过 1.5 h 的概率.

B6. 在 A 地至 B 地 (距离为 m km) 的公路上, 事故发生地在离 A 地 X km 处, 事故处理车在离 A 地 Y km 处. 设 X 与 Y 均

服从 $(0,m)$ 上的均匀分布，且 X 与 Y 相互独立，求事故车与处理车的距离 Z 的密度函数.

B7. 设一系统由三个相互独立的、正常工作时间分别为 X_1, X_2, X_3 的子系统组成 (如图 1 所示)，且 $X_i(i=1,2,3)$ 均服从参数为 λ 的指数分布，求该系统正常工作时间 T 的分布函数 $F_T(t)$ 及密度函数 $f_T(t)$.



◀图 1

B8. (1) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且均服从参数为 $p(0<p<1)$ 的 0-1 分布，记 $Z=\sum_{i=1}^{n} X_i$，求 Z 的概率分布律;

(2) 设 $X \sim B(m,p)$, $Y \sim B(n,p)$，且 X 与 Y 相互独立，记 $W=X+Y$，求 W 的概率分布律.

B9. 设随机变量 X 服从区间 $(-a,a)$ 上的均匀分布，其中 $a>0$，$Y \sim N(\mu,\sigma^2)$，且 X 与 Y 相互独立，记 $Z=X+Y$，求 Z 的密度函数.

B10. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3-x-y}{3}, & 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记 $Z=X+Y$，求 Z 的密度函数.

B11. 已知市场上某种蔬菜的价格 (单位: 元/kg) $X \sim U(6,8)$ (均匀分布)，设某餐馆近期购买该种蔬菜的数量 Y 为 8 kg 和 10 kg 的概率均为 0.5.

(1) 求购买金额 Z 不大于 60 元的概率 p;

(2) 求购买金额 Z 的分布函数 $F_Z(z)$.

B12. 设一本书每页的错误个数 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且各页错误个数相互独立. 现随机选 10 页，其错误个数分别记为 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$.

(1) 求 $P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i \geqslant 2\right\}$;

(2) 求 $P\left\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 10} X_i \geqslant 2\right\}$;

(3) 求 $P\left\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 10} X_i \geqslant 2 \,\middle|\, \min\limits_{1\leqslant i\leqslant 10} X_i = 0\right\}$.

B13. 设一系统由两个独立的子系统组成，分别以 X, Y 记两个子系统的正常工作时间，且设 X, Y 分别服从参数为 λ_1 与 λ_2 的指数分布. 当这两个子系统 (1) 串联, (2) 并联, (3) 有备份 (当一个损坏时另一个接着工作) 时，分别求系统正常工作时间 T 的密度函数.

思考题四

1. 下面的说法是否正确:

设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0,\\ 1-x, & 0\leqslant x<1.\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 X 的数学期望为

$$E(X)=\begin{cases}\int_{-1}^{0}(1+x)x\mathrm{d}x, & -1\leqslant x<0,\\ \int_{0}^{1}(1-x)x\mathrm{d}x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

2. 随机变量 X 与 Y 同分布, 那么它们的任意阶矩 (如果存在) 是否全部相等? 反之, 若有 $E(X)=E(Y)$ 且 $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)$, 能否推出随机变量 X 与 Y 的分布一定相同?
3. 某品牌矿泉水一瓶净含量记为随机变量 X (单位: mL). 已知 $X\sim N(500,2.5^2)$, 从中随机抽取两瓶, 则两瓶矿泉水的总重量的方差是 2×2.5^2 还是 $2^2\times2.5^2$ 呢?
4. 试述独立性与不相关性的区别和联系.
5. 对于随机变量序列 $\{X_i,i\geqslant1\}$, 判断下面两个结论是否成立:

(1) 对于 $n\geqslant1$, 有 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)$, 且 $\mathrm{Var}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)$;

(2) 若 $\{X_i,i\geqslant1\}$ 相互独立, 那么对于 $n\geqslant1$, 有 $E\left(\prod\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}E(X_i)$, 且 $\mathrm{Var}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)$.

6. 下列说法是否正确: 若 $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=1$, 则 $\mathrm{Var}(X-2Y)=\mathrm{Var}(X)-2\mathrm{Var}(Y)=-1$.
7. 下列说法是否正确: 设 X 服从 $U(1,3)$, 则 $E\left(\dfrac{1}{X}\right)=\dfrac{1}{E(X)}=\dfrac{1}{2}$.

习题四

(A)

A1. 设一盒中有 3 个红球 2 个白球. 从中取 3 次, 每次取 1 个球. 令 X 表示取到红球的个数, 分别求 (1) 无放回抽样, (2) 有放回抽样这两种抽样方式下的 $E(X)$.

A2. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}, & 1<x<3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $E(X)$ 和 $P\{X>E(X)\}$.

A3. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

已知 $E(X)=\dfrac{11}{9}$, 求 a,b.

A4. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X	Y		
	0	1	2
1	0.2	0.1	0.3
2	0.2	0	0.2

求随机变量 Z 的数学期望 $E(Z)$:

(1) $Z=XY$; (2) $Z=\min\{X,Y\}$; (3) $Z=\max\{X,Y\}$.

A5. 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x+y}{4}, & 0<x<1,0<y<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

分别求数学期望 $E(X),E(Y),E(XY)$.

A6. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E\left(3X^2-\dfrac{1}{3X^2}\right)$.

A7. 设一盒中有 3 个红球 2 个白球. 从中取 3 次, 每次取 1 个球, 令 X 表示取到红球的个数, 分别求 (1) 无放回抽样, (2) 有放回抽样两种抽样方式下的 $\mathrm{Var}(X)$.

A8. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $\mathrm{Var}(X)$.

A9. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}|y|, & -1<y<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求 $\mathrm{Var}(X-2Y)$.

A10. 设 X 的分布函数如下:

$$(1)\ F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.3, & 0\leqslant x<1,\\ 0.5, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2;\end{cases}$$

$$(2)\ F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{x}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

分别求 $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.

A11. 设 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y):0<x<y<1\}$ 上服从均匀分布, 求 $\mathrm{Var}(XY)$.

A12. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $X\sim P(2)$, $Y\sim B(2,0.4)$, 求 $E(2X-Y)$, $\mathrm{Var}(2X-Y)$, $E[(2X-Y)^2]$.

A13. 设随机变量 X 服从参数为 $\dfrac{1}{2}$ 的指数分布, 求 $E[X(X-1)]$.

A14. 设随机变量 $X\sim U(a,b)$, $Y\sim N(2,3)$, X 与 Y 有相同的数学期望与方差, 求 a,b 的值.

A15. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律如第 A4 题所示, 求协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 及相关系数 ρ_{XY}.

A16. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x}{4}, & 0<x<y<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 及相关系数 ρ_{XY}.

A17. 设 $(X,Y)\sim N(-1,1;4,4;0.6)$, 求 $E(XY)$.

A18. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X	Y		
	0	1	2
1	0.1	0.4	0.1
2	0.2	0	0.2

判断 X 与 Y 是否相关, 是否相互独立.

A19. 设 $(X,Y) \sim N(-1,1;4,4;0.6)$, 若 $X+Y$ 与 $X-aY$ 相互独立, 此时 a 取何值?

(B)

B1. 某批产品共有 M 件, 其中正品 N 件 $(0 \leqslant N \leqslant M)$. 从整批产品中随机地进行有放回抽样: 每次抽取一件, 记录产品是正品还是次品后放回, 抽取了 n 次 $(n \geqslant 1)$, 求这 n 次中抽到正品的平均次数.

B2. 一位即将毕业的大学生有意向与某企业签订就业合同. 该企业给他两个年薪方案供选择: 方案一: 年薪 10 万元; 方案二: 底薪 6 万元, 如果业绩达到公司要求, 就可再获得业绩津贴 10 万元, 如果达不到, 就没有业绩津贴, 一般约有 80% 的可能性可以达到公司的业绩要求. 他应当选择哪种方案? 说明理由.

B3. 设一袋中有 8 个球, 分别编号为 $1 \sim 8$. 现随机从袋中取出 2 球, 记其中最大号码的球的编号为 X, 求 $E(X)$.

B4. 直线上一质点在时刻 0 从原点出发, 每经过一个单位时间向左或者向右移动一个单位, 每次移动是相互独立的, 并且向右移动的概率为 $p(0<p<1)$. η_n 表示到时刻 n 为止质点向右移动的次数, S_n 表示在时刻 n 时质点的位置 $(n \geqslant 1)$, 求 η_n 与 S_n 的数学期望.

B5. 抛一枚均匀的硬币, 直到正、反两面都出现后停止试验, 求试验的平均次数.

B6. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}\mathrm{e}^{-2x}, & 0<x<+\infty, 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 $E(X)$; (2) 求 $E(3X-1)$; (3) 求 $E(XY)$.

B7. 已知一根长度为 1 的棍子上有个标志点 Q, 现随机地将此棍子折成两段.

(1) 已知点 Q 距离棍子某一端点的距离为 q, 求包含点 Q 的那一段棍子的平均长度 (若截点刚好是点 Q, 则认为点 Q 包含在较短的一段中);

(2) 当点 Q 位于棍子何处时, 包含点 Q 的棍子平均长度达到最大?

B8. 甲、乙两人约定上午 8:00~9:00 在某地见面, 两人均在该时段随机到达, 且到达时间相互独立, 求两人中先到的人需要等待的平均时间.

B9. 为诊断 500 人是否有人患有某种疾病, 抽血化验, 可用两种方法: (1) 每个人化验一次; (2) 分成 k 人一组$\left(\text{共 } \dfrac{500}{k} \text{ 组, 假设 } \dfrac{500}{k} \text{ 为正整数}, k>1\right)$, 将每组 k 人的血液集中起来一起检

验，若化验结果为阴性，则说明组内的每人都是阴性，就无须分别化验；若检验结果为阳性，则说明这 k 人中至少有一人患病，那么就对该组内的 k 人再单独化验. 如果此病的得病率为 20%，问哪种方法的平均检验次数相对少一些？

B10. 已知某设备无故障运行的时间 T (以 h 计) 服从数学期望为 $\dfrac{1}{\lambda}(\lambda > 0)$ 的指数分布. 若设备在一天 8 h 的工作时间内发生故障就自动停止运行待次日检修，否则就运行 8 h 后停止，求该设备每天运行的平均时间.

B11. 某电子监视器的圆形屏幕半径为 $r(r > 0)$，若目标出现的位置点 A 服从均匀分布. 以圆形屏幕的圆心为原点，设点 A 的平面直角坐标为 (X, Y).

(1) 求 $E(X)$ 与 $E(Y)$；

(2) 求点 A 与屏幕中心位置 $(0,0)$ 的平均距离.

B12. 一个袋子中有 15 个均匀的球，其中 a 个是白球，其他的是黑球. 无放回地随机抽取 n 次 (每次取一球)，记取到的白球数为 ξ_n. 已知 $E(\xi_2) = \dfrac{4}{3}$.

(1) 求 a； (2) 求 $E(\xi_9)$.

B13. 从 $1 \sim 100$ 这 100 个数中无放回地取 10 个数，计算这 10 个数的和的数学期望.

B14. 有 n 张各不相同的卡片，采用有放回抽样，每次取一张，共取 n 次，则有些卡片会被取到，甚至被取到很多次，但有些卡片可能不曾被取到. 设这 n 张卡片中被取到的共有 X 张，计算 $E(X)$，并计算当 $n \to +\infty$ 时，$E\left(\dfrac{X}{n}\right)$ 的极限.

B15. 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取 $n(n \geqslant 2)$ 个点，求相距最远的两个点的距离的数学期望.

B16. 设进入大型购物中心的顾客有可能去其中的一家冷饮店购买冷饮，购买的概率为 $p(0 < p < 1)$. 若在一天的营业时间内进入该购物中心的顾客数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布，求这一天去该冷饮店购买冷饮的顾客数 Y 的分布及数学期望.

B17. 设二维随机 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}x, & 0 < x < y < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求 $E(Y|X = x)$；

(2) 用两种方法计算 $E(Y)$.

B18. (接第 B12 题) 当 $n = 2$ 时，求 $\mathrm{Var}(\xi_2)$.

B19. 已知随机变量 X 服从 Γ 分布，密度函数为

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0,$$

其中 α 称为"形状参数", λ 称为"尺度参数", 求 $E(X^k)(k \geqslant 1)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$.

B20. 设随机变量 X 服从拉普拉斯分布, 密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

计算 X 与 $|X|$ 的方差.

B21. 机器处于不同状态时制造产品的质量有所差异. 如果机器运作正常, 那么产品的正品率为 98%; 如果机器老化, 那么产品的正品率为 90%; 如果机器处于需要维修的状态, 那么产品的正品率为 74%. 机器正常运作的概率为 0.7, 老化的概率为 0.2, 需要维修的概率为 0.1. 现随机抽取了 100 件产品 (假设生产这些产品的机器的状态相互独立).

(1) 求产品中非正品数的数学期望与方差;

(2) 在已知这些产品都是正常机器制造出来的条件下, 求正品数的数学期望和方差.

B22. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 且都服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的 0–1 分布.

(1) 求 $P\{X+Y \geqslant 1\}$;

(2) 计算 $E(X\cdot(-1)^Y)$ 及 $\mathrm{Var}(X\cdot(-1)^Y)$.

B23. 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1 和 L_2 组成, L_1 和 L_2 的寿命 X 与 Y 分别服从数学期望为 $\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ 的指数分布, 就下列三种连接方式写出系统 L 的寿命 Z 的数学期望和变异系数:

(1) L_1 和 L_2 串联;

(2) L_1 和 L_2 并联;

(3) L_2 为 L_1 的备用.

B24. (接第 B20 题) (1) 求 X 与 $|X|$ 的相关系数, 并判断两者是否相关;

(2) 判断 X 与 $|X|$ 是否相互独立.

B25. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1+xy), & |x|<1, |y|<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 计算 X 与 Y 的相关系数, 并判断它们的独立性和相关性;

(2) 计算 X^2 与 Y^2 的相关系数, 并判断它们的独立性和相关性.

B26. 独立地抛一枚均匀的骰子 n 次 $(n \geqslant 2)$. 记 X, Y 分别为试验中 "1 点朝上" 以及 "6 点朝上" 出现的次数, 求 X 与 Y 的相关系数, 并判断两者的相关关系.

B27. 有一随机 $\triangle ABC$, $\angle A$ 与 $\angle B$ 独立同分布, 设 A 的概率分布律如下:

A	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
p	λ	θ	$1-\lambda-\theta$

其中 $\lambda>0,\ \theta>0$, 且满足 $\lambda+\theta<1$. 已知 $E(\sin A)=E(\cos A)=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1}{8}$.

(1) 写出 (A,B) 的联合分布律;

(2) 求 $E(\sin C)$;

(3) 求 $\angle A$ 与 $\angle C$ 的相关系数, 并由此判断它们的相关性 (若相关, 说明是正相关还是负相关).

B28. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 均服从标准正态分布并且相互独立. 记 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}X_i$, $T_k=\sum\limits_{j=n_0+1}^{n_0+k}X_j$, 其中 $1\leqslant n_0<k<n_0+k\leqslant n$, 求 S_k 与 T_k 的相关系数.

B29. 设 $X\sim N(0,1)$, Y 的可能取值为 ±1, 且 $P\{Y=1\}=p(0<p<1)$. 设 X 与 Y 相互独立, 记 $\xi=X\cdot Y$.

(1) 证明: $\xi\sim N(0,1)$;

(2) 计算 $\rho_{X\xi}$, 并判断 X 与 ξ 的相关性和独立性.

B30. 有 n 包巧克力, 每包重量服从分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 且各包重量相互独立, 求前 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 包重量与这 n 包总重量的相关系数.

B31. 设甲、乙两个盒子中都装有 2 个白球 3 个黑球. 先从甲盒中任取 1 个球放入乙盒, 再从乙盒中随机地取出一球, 用 X 与 Y 分别表示从甲、乙盒中取得的白球数.

(1) 求 (X,Y) 的联合分布律, 并判断 X 与 Y 是否相互独立;

(2) 求出 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, 并由此判断 X 与 Y 的相关性.

B32. 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(0,1;1,4;\rho)$. 令 $\xi=aX-bY$, $\eta=aY-bX$, 其中 a,b 为实数, $a\neq b$ 且 $ab\neq0$.

(1) 当 $\rho=0$ 时, 分别写出 ξ 与 η 的分布 (要求写出参数) 及它们各自的标准化变量, 并计算 ξ 与 η 的相关系数;

(2) 当 $\rho=\dfrac{1}{2}$ 时, 计算 ξ 的变异系数;

(3) 当 $\rho=\dfrac{1}{2}$ 时, 计算 η 的中位数;

(4) 当 $\rho=-1$ 时, 判断 ξ 与 η 的独立性和相关性.

B33. 已知三维正态变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3)^{\mathrm{T}}\sim N(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$, 其中

$$\boldsymbol{a}=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&16&0\\-1&0&4\end{pmatrix}.$$

(1) 写出 $\boldsymbol{X}$ 的每个分量的分布;

(2) 判别 X_1,X_2,X_3 的相关性与独立性;

(3) 若 $Y_1 = X_1 - X_2$, $Y_2 = X_3 - X_1$, 求 $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^{\mathrm{T}}$ 的分布.

B34. 设有一煤矿一天的产煤量 X (以 10^4 t 计) 服从正态分布 $N(1.5, 0.1^2)$. 设每天产量相互独立, 一个月按 30 天计, 求一个月总产量超 46×10^4 t 的概率.

B35. 某地区成年男子身高 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(170, 144)$, 从该地区独立抽选 4 人, 求这 4 人平均身高超过 176 cm 的概率.

$=1,2,\cdots$. 如果存在 $\varepsilon>0$, 使

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{B_n^{2+\varepsilon}}\sum_{i=1}^{n}E|X_i-\mu_i|^{2+\varepsilon}=0, \tag{5.2.6}$$

其中 $B_n^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$, 那么对于任意的 $x\in\mathbf{R}$, 有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$

思考题五

1. 依概率收敛与高等数学中的收敛含义有何区别?
2. 马尔可夫不等式与切比雪夫不等式分别适用于哪些随机变量?
3. 说明大数定律与中心极限定理的联系与区别.
4. 对例 5.2.5 而言, 为什么利用中心极限定理与切比雪夫不等式得到的结论有所差异?

习题五

(A)

A1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立, 均服从参数为 2 的指数分布. 问当 $n\to+\infty$ 时, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于何值?

A2. 设随机变量序列 $\{X_n,n\geqslant1\}$, 当 $n\to+\infty$ 时, X_n 依概率收敛于 3. 问当 $n\to+\infty$ 时, 下列随机变量序列依概率收敛于何值:

(1) X_n^2; (2) $2X_n-3$.

A3. 设 X_1 与 X_2 相互独立, 均值都为 2, 方差都为 4, 用切比雪夫不等式求 $P\{|X_1-X_2|\geqslant4\}$ 的上界.

A4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{315}$ 独立同分布, X_1 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

Y 表示 $\{X_i<1.5\}$ $(i=1,2,\cdots,315)$ 出现的个数, 求 $P\{Y<140\}$ 的近似值.

A5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{240}$ 独立同分布, $P\{X_1=-2\}=0.3$, $P\{X_1=0\}=0.4$, $P\{X_1=2\}=0.3$. 令 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_{240}$, 求 $P\{|Y|>24\}$ 的近似值.

(B)

B1. 某种类的昆虫每周产卵数为随机变量 X (以个计), 若已知其平均周产卵数为 36 个.

(1) 用马尔可夫不等式求一周内该昆虫产卵数不少于 50 个的

概率的上界;

(2) 若又已知该昆虫每周产卵数的标准差为 2 个, 用切比雪夫不等式求一周内产卵数在 (32, 40) 内的概率的下界.

B2. 一种遗传病的隔代发病率为 10%, 在得病家庭中选取 500 户进行研究. 试用切比雪夫不等式估计这 500 户中隔代发病的比例与发病率之差的绝对值小于 5% 的概率下界.

B3. 设随机变量 X_i 的密度函数

$$f_i(x)=\begin{cases}\dfrac{i|x|^{i-1}}{2}, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n.$$

且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立. 令 $Y_n=X_1X_2\cdots X_n$, 用切比雪夫不等式求使 $P\left\{|Y_n|\geqslant \dfrac{1}{2}\right\}\leqslant \dfrac{1}{9}$ 成立的最小的 n.

B4. 设随机变量序列 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 独立同分布, 都服从 $U(0,a)$, 其中 $a>0$. 令 $X_{(n)}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$, 证明: $X_{(n)}\xrightarrow{P}a,\ n\to+\infty$.

B5. 设随机变量序列 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 独立同分布, 数学期望与方差均存在, 证明:

$$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i\cdot X_i\xrightarrow{P}E(X_1),\quad n\to+\infty.$$

B6. 设 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 为独立同分布的正态随机变量序列, 若 $X_1\sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中 $\sigma>0$. 问以下的随机变量序列当 $n\to+\infty$ 时依概率收敛吗? 若收敛, 请给出收敛的极限值, 否则请说明理由:

(1) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$;

(2) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$;

(3) $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}$;

(4) $\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{\sqrt{n\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}}$.

B7. 设随机变量序列 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 独立同分布, 都服从期望为 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的指数分布, 其中 $\lambda>0$.

(1) 若对任意的 $\varepsilon>0$, 均有

$$\lim_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}{n}-a\right|<\varepsilon\right\}=1$$

成立, 求 a;

(2) 给出 $\dfrac{1}{50}\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$ 的近似分布;

(3) 求 $P\left\{\dfrac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{100}X_i^2\leqslant \dfrac{2}{\lambda^2}\right\}$ 的近似值.

B8. 抛掷一枚硬币 10 000 次, 出现了 5 325 次"正面", 是否可以断言此硬币是不均匀的?

B9. 设随机变量 X 服从辛普森 (Simpson) 分布 (亦称三角分布), 密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1, \\ 2-x, & 1\leqslant x<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 对 X 进行 100 次独立观察, 事件 $\{0.95<X<1.05\}$ 出现的次数记为 Y, 试用三种方法 (Y 的精确分布、用泊松分布来作为 Y 的近似分布、中心极限定理) 分别求 $P\{Y>2\}$;

(2) 要保证至少有 95% 的把握使事件 $\left\{\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right\}$ 出现的次数不少于 80, 问至少需要进行多少次观察?

B10. 某企业庆祝百年华诞, 邀请了一些社会名流及企业的相关人士来参加庆典, 被邀请人独自一人或携伴 (一位同伴) 出席, 也有可能因故缺席, 这三种情况出现的概率分别为 0.3, 0.5, 0.2. 若此次庆典事先发出了 800 份邀请函, 若每位被邀请人参加庆典的行为相互独立, 问有超过千人出席该庆典的可能性有多大?

B11. 某次"知识竞赛"规则如下: 参赛选手最多可抽取 3 个相互独立的问题一一回答: 如果答错就被淘汰, 进而失去回答下一题的资格; 每答对一题得 1 分, 若 3 题都对则再加 1 分 (即共得 4 分). 现有 100 名参赛选手, 每人独立答题.

(1) 若每人至少答对一题的概率为 0.7, 用中心极限定理计算"最多有 35 人得 0 分"的概率;

(2) 若题目的难易程度类似, 每人答对每题的概率均为 0.8, 求这 100 名参赛选手的总分超过 220 分的概率.

$i=1\ j=1$

其中 $\delta_{lk}=\begin{cases}0, & l\neq k,\\ 1, & l=k.\end{cases}$ 因此, $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 仍独立同分布, $Y_i\sim N(0,1), i=1,2,\cdots,n$, 并且

$$Y_1=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}Z_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}Z_i=\sqrt{n}\cdot\overline{Z},$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2-n\overline{Z}^2=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-Y_1^2=\sum_{i=2}^{n}Y_i^2\sim\chi^2(n-1).$$

即 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 仅和 $Y_2,Y_3,\cdots,Y_n$ 有关, 而 $\overline{X}$ 仅依赖于 Y_1, 从而推出 $\overline{X}$ 和 S^2 相互独立.

思考题六

1. 什么是统计量? 什么是统计量的值? 什么是抽样分布?
2. 简单随机样本有哪两个主要性质? 在实际中如何获得简单随机样本?
3. $N(0,1)$, t 分布, χ^2 分布和 F 分布的上、下分位数是如何定义的? 怎样利用附表查这些分位数的值? 如何利用 Excel 得出分位数的值?
4. 从总体 X 中抽取样本 X_1,X_2,X_3, 假设 $X\sim N(0,\sigma^2)$, 下列结果哪些不正确? 为什么?

   (1) $\frac{X_1+X_2+X_3}{\sigma}\sim N(0,3)$; (2) $\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)$;

   (3) $\frac{X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2}}\sim t(2)$; (4) $\mathrm{Var}(X_1+\overline{X})=\frac{4}{3}\sigma^2$;

   (5) $\frac{2X_1^2}{X_2^2+X_3^2}\sim F(1,2)$; (6) $\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})=\sigma^2$.
5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本, 记 $\overline{X}$, S^2 分别是样本均值和样本方差, 问 $\overline{X}$ 与 S^2 一定相互独立吗?
6. 设 $X\sim N(0,1), Y\sim\chi^2(n)$, 问 $t=\frac{\sqrt{n}X}{\sqrt{Y}}\sim t(n)$ 一定成立吗?

习题六 (A)

A1. 假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从总体 X 中抽取的样本 ($n\geqslant 1$). 当总体 X 服从如下分布时, 写出样本的联合分布律或联合密度函数:

(1) 总体服从二项分布 $B(10,0.2)$;

(2) 总体服从泊松分布 $P(1)$;

(3) 总体服从标准正态分布 $N(0,1)$;

(4) 总体服从指数分布 $E(1)$.

A2. 设总体 $X\sim N(\mu,1)$, μ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 判断下列哪些是统计量, 哪些不是统计量:

(1) $\sum\limits_{i=1}^{5}X_i$;　　(2) $\sum\limits_{i=1}^{5}X_i^2-5\mu^2$;

(3) $\sum\limits_{i=1}^{5}(X_i-\mu)$;　　(4) X_1-X_2.

A3. 从总体 X 中抽取样本容量为 5 的样本, 其观测值为 2.6, 4.1, 3.2, 3.6, 2.9, 计算样本均值、样本方差和样本二阶中心矩.

A4. 从总体 $X\sim N(0,1)$ 中抽取样本容量为 10 的样本, 其观测值为 2.50, 0.49, 0.53, −0.37, 0.61, −0.63, 0.01, 0.81, 0.78, 0.27, 计算样本均值和样本方差.

A5. 假设 $X_1,X_2,\cdots,X_7$ 是从总体 $X\sim B(1,0.3)$ 中抽取的简单随机样本.

(1) 求样本均值 $\overline{X}$ 的数学期望和方差;

(2) 求样本方差 S^2 的数学期望;

(3) 求 $P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_7\}<1\}$.

A6. 给出下列上分位数的值:

(1) $\chi^2_{0.05}(5)$, $\chi^2_{0.06}(5)$, $\chi^2_{0.95}(5)$, $\chi^2_{0.94}(5)$;

(2) $t_{0.05}(8)$, $t_{0.06}(8)$, $t_{0.95}(8)$, $t_{0.94}(8)$;

(3) $F_{0.05}(3,5)$, $F_{0.05}(5,3)$, $F_{0.04}(3,5)$, $F_{0.04}(5,3)$.

A7. 假设 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是从总体 $X\sim\chi^2(2)$ 中抽取的简单随机样本.

(1) 求 $P\{X_1+X_2+\cdots+X_5>18.307\}$;

(2) 求 $X_1+X_2+\cdots+X_5$ 的分布, 并由此给出它的上 0.1 分位数.

A8. 假设 $X\sim N(0,1)$, 利用 χ^2 分布的性质, 求 X 的四阶原点矩 A_4.

A9. 假设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 为来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的一个简单随机样本, 记 $Y^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_9^2$, $T=\dfrac{3X_{10}}{Y}$.

(1) 求 $P\{|T|>1.8331\}$;

(2) 求 T 的上 0.10 分位数.

A10. 假设 $X\sim t(5)$, 求 $Y=\dfrac{1}{X^2}$ 的上 0.05 分位数和上 0.1 分位数.

A11. 设总体 X 服从标准正态分布, $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 写出下列统计量的分布:

(1) 样本均值 $\overline{X}$; (2) $\sum_{i=1}^{16} X_i^2$; (3) $\dfrac{3X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{10} X_i^2}}$;

(4) $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$; (5) $\overline{X}-X_1$.

A12. 假设总体 $X \sim N(0,4)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{20}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 求 $P\left\{33.04 \leqslant \sum_{i=1}^{20} X_i^2 \leqslant 125.64\right\}$.

A13. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{25}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, μ 和 σ^2 均未知, S^2 为样本方差, 求 $P\left\{\dfrac{S^2}{\sigma^2} \leqslant 0.577\right\}$.

(B)

B1. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{25}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 是样本均值.

(1) 求 $P\{|\overline{X}-\mu| < 0.2\sigma\}$;

(2) 若 $P\{\overline{X} > \mu - c\sigma\} = 0.95$, 求 c.

B2. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 是样本均值, S^2 是样本方差, 写出下列抽样分布:

(1) $\dfrac{3(\overline{X}-\mu)}{\sigma}$; (2) $\dfrac{3(\overline{X}-\mu)}{S}$;

(3) $\dfrac{\sum_{i=1}^{9}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$; (4) $\dfrac{\sum_{i=1}^{9}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$;

(5) $\dfrac{9(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}$; (6) $\dfrac{9(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}$;

(7) $\dfrac{2(X_1-X_2)^2}{(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2}$;

(8) $\dfrac{(X_1-Y_1)^2+(X_2-Y_1)^2+(X_3-Y_1)^2}{(X_4-Y_2)^2+(X_5-Y_2)^2+(X_6-Y_2)^2}$, 其中 $Y_1=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}, Y_2=\dfrac{X_4+X_5+X_6}{3}$.

B3. 假设二维总体 $(X,Y) \sim N(0,0;1,1;\rho)$, $(X_i,Y_i), i=1,2,\cdots,10$ 为从该总体中抽取的简单随机样本, 记统计量 $Z = a\sum_{i=1}^{10}(X_i+Y_i)^2$, 若 $Z \sim \chi^2(n)$, 求 a 和 n 的值.

B4. 对一重量为 a 的物体独立重复称 n 次, 现准备用这 n 次读数的平均值去估计 a. 假设这批读数来自均值为 a, 标准差为 2.5 的正态总体, 至少要称多少次才能使估计值与 a 之差的绝对值不大于 0.5 的概率 (1) 超过 90%; (2) 超过 95%.

B5. 设总体 X 的密度函数

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty,$$

从总体中抽取样本容量为 10 的样本, $\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差, 求:

(1) $\overline{X}$ 的数学期望和方差;

(2) S^2 的数学期望.

B6. 设总体 $X\sim U(0,\theta)$, $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\overline{X}$ 是样本均值, S^2 是样本方差, 求 $E(\overline{X})$, $E(\overline{X}^2)$ 和 $E(S^2)$.

B7. 设总体 X 的密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

从总体中抽取样本容量为 10 的样本.

(1) 求样本均值的数学期望和方差;

(2) 记 $X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_{10}\}$, 求 $X_{(1)}$ 的数学期望和方差.

B8. 假设总体 X 服从指数分布, 密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

从总体中抽取一个样本容量为 50 的简单随机样本 X_1, $X_2,\cdots,X_{50}$, 记 $Y_j=\min\limits_{1+10j\leqslant i\leqslant 10+10j}X_i, j=0,1,2,3,4$, 求 $Z=\sum\limits_{j=0}^{4}Y_j$ 的分布.

B9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_8$ 是来自标准正态总体的样本, $\overline{X}=\frac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}X_i$, $S^2=\frac{1}{7}\sum\limits_{i=1}^{8}(X_i-\overline{X})^2$, X_9 是新增的样本, 试确定 $Y=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{X_9-\overline{X}}{S}$ 的分布.

B10. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_9$ 是来自总体 X 的两个独立样本, $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别是两个样本的样本均值, S_1^2 和 S_2^2 分别是两个样本的样本方差.

(1) 若 $\frac{a(\overline{X}-\overline{Y})}{\sigma}\sim N(0,1)$, 求 a;

(2) 若 $\frac{b(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{S_1^2+2S_2^2}}\sim t(12)$, 求 b.

B11. 在两个等方差的正态总体中, 独立地各抽取一个样本容量为 7

的样本，它们的样本方差分别为 S_1^2, S_2^2，若 $P\left\{\max\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}, \frac{S_2^2}{S_1^2}\right\} > c\right\} = 0.05$，求 c.

B12. 设总体 $X \sim \chi^2(n)$, $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 $P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{8} X_i}{\sum\limits_{i=9}^{16} X_i} \leqslant 1\right\}$;

(2) 求 $P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{8} X_i}{\sum\limits_{i=9}^{16} X_i} = 1\right\}$.

思考题七

1. 未知参数的估计量与估计值有什么区别?
2. 样本均值 $\overline{X}$ 和样本方差 S^2 分别是总体均值 μ 和总体方差 σ^2 的无偏估计, 问 $\overline{X}=\mu$ 吗? $P\{\overline{X}=\mu\}$ 是多少? $P\{S^2=\sigma^2\}$ 又是多少呢?
3. 设 $\widehat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计, 且 $\mathrm{Var}(\widehat{\theta})>0$, 问 $\widehat{\theta}^2$ 是 θ^2 的无偏估计吗?
4. 说明利用矩法和极大似然法求参数点估计量的统计思想.
5. 给出求解参数的矩估计和极大似然估计的主要步骤, 并写出 $0-1$ 分布、二项分布 $B(n,p)$、泊松分布 $P(\lambda)$、均匀分布 $U(a,b)$、指数分布 $E(\lambda)$ 和正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 中各参数的矩估计和极大似然估计.
6. 给出估计量的四个评价标准并说明其统计意义.
7. 如何理解置信水平的含义? 置信水平、精确度 (区间平均长度) 和样本容量的关系怎样?
8. 说明枢轴量和统计量的区别.
9. 利用枢轴量法求解参数置信区间的基本步骤, 对正态总体, 试从有关的统计量出发自行导出几类参数的置信区间.
10. 设总体 X 不服从正态分布或其分布未知, 均值为 μ, 方差为 σ^2, 均未知. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的简单随机样本, $n\geqslant 2$, $\overline{X}$ 和 S^2 分别是样本均值和样本方差, 如何给出总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间?

习题七 (A)

A1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自下列总体 X 的简单随机样本, 求各总体分布中参数的矩估计量:

(1) $X\sim 0-1(p)$; (2) $X\sim P(\lambda)$; (3) $X\sim U(a,2)$.

A2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自下列总体 X 的简单随机样本, 求各总体分布中参数的极大似然估计量:

(1) $X\sim 0-1(p)$; (2) $X\sim E(\lambda)$; (3) $X\sim U(1,b)$.

A3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自下列总体 X 的简单随机样本, 求各总体中未知参数 θ 的矩估计量和极大似然估计量, 并对所获得的样本值, 求参数 θ 的矩估计值和极大似然估计值:

(1) $f(x;\theta)=\begin{cases}2^{-\theta}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}\quad \theta>0;$

样本值: 0.45 0.2 0.5 0.47 0.35 1.63 0.14 0.06 0.89 0.34

(2) $f(x;\theta)=\dfrac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}},-\infty<x<+\infty,\theta>0;$

样本值: −0.05 −0.47 0.01 −0.03 −0.18 1.65 −0.64 −1.05 0.41 −0.19

(3) $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-\theta}, & \theta \leqslant x<2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \theta<2;$

样本值: 0.95　0.63　1.69　1.97　0.84　1.81　0.53　0.35
1.34　0.82

A4. 设总体 X 服从参数为 p 的几何分布, 具有概率分布律

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, \quad k=1,2,\cdots,$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自该总体的一个样本, 给定的样本观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 求参数 p 的极大似然估计值.

A5. 设总体 X 具有如下概率分布律:

X	0	1	2
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $0<\theta<1$. 从上述总体中抽取样本容量为 9 的简单随机样本, 观测值: 2, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 求参数 θ 的矩估计值和极大似然估计值.

A6. 设总体 X 具有如下概率分布律:

X	0	1	2
p	θ	λ	$1-\theta-\lambda$

其中 $0<\theta<1, 0<\lambda<1, 0<\theta+\lambda<1$. 从上述总体中抽取样本容量为 9 的简单随机样本, 观察值: 2, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 1, 求参数 θ 和 λ 的矩估计值和极大似然估计值.

A7. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$\theta>0$ 未知, 记 $\mu_2=E(X^2)$, $p=P\{X>1\}$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自该总体的简单随机样本, 求参数 θ, μ_2 和 p 的极大似然估计量.

A8. 设总体 X 的均值为 μ, 方差为 σ^2, $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 问 a 取何值时, $a\sum\limits_{i=1}^{9}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量?

A9. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 未知, X_1,X_2,X_3 是总体 X 的简单随机样本, 用

$$\widehat{\mu}_1=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3,$$

$$\widehat{\mu}_2=2X_1-2X_2+X_3,$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$$

估计参数 μ, 它们都是无偏估计量吗? 如果是, 哪个更有效?

A10. 设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量, 且 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 相互独立. 已知 $D(\hat{\theta}_1) = \sigma_1^2, D(\hat{\theta}_2) = \sigma_2^2$, 引入 θ 的一个新的无偏估计量 $\hat{\theta}_3 = \alpha\hat{\theta}_1 + (1-\alpha)\hat{\theta}_2$, 试确定常数 α, 使 $D(\hat{\theta}_3)$ 达到最小.

A11. 某机器生产的螺杆直径 X (单位: mm) 服从正态分布 $N(\mu, 0.3^2)$.

(1) 从总体中抽取样本容量为 5 的样本, 测得直径: 22.3, 21.5, 21.8, 21.4, 22.1, 试在 95% 的置信水平下求该机器所生产的螺杆平均直径 μ 的置信区间;

(2) 若要使螺杆的平均直径 μ 的置信水平为 95% 的置信区间长度不超过 0.2, 问样本容量 n 至少应取多大?

A12. 某厂生产的灯泡寿命 X (单位: h) 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 未知, 从已生产的一大批灯泡中采用无放回抽样方式抽取 15 只, 测得其寿命如下:

4 040	2 990	2 964	3 245	3 026	3 633	3 387	4 136
3 595	3 194	3 714	2 831	3 845	3 410	3 004	

(1) 求 μ 的置信水平为 95% 的置信区间;

(2) 求 μ 的置信水平为 95% 的单侧置信下限.

A13. 某医学研究所研发了一种新药, 对 9 个试验者进行为期半年的观察, 记录服用该药前后的甘油三酯水平的变化, 数据如下 (单位: mg/dL):

服药前	180	139	152	167	138	160	107	156	94
服药后	100	92	118	171	132	123	84	112	105

假设服药前后甘油三酯水平差服从正态分布, 在置信水平 95% 下给出服药前后甘油三酯平均水平差的区间估计.

A14. 为比较甲、乙两种肥料对产量的影响, 研究者选择了 10 块田地, 将每块田地分成大小相同的两块, 随机选择一块用甲肥料, 另一块用乙肥料, 其他条件保持相同, 得到的产量 (单位: kg) 数据如下:

甲肥料	109	98	97	100	104	102	94	99	103	108
乙肥料	107	105	110	118	109	113	111	95	112	101

假设甲、乙两种肥料的产量差服从正态分布, 试在 95% 的置信水平下推断甲、乙两种肥料的平均产量差值的范围.

A15. 下面 16 个数字来自计算机的正态随机数生成器:

8.801	3.817	8.223	6.374	9.252	7.352	13.781	7.599
13.134	4.465	6.533	7.021	9.015	7.325	7.041	9.560

(1) 给出总体均值 μ 和方差 σ^2 的极大似然估计值;

(2) 求均值 μ 的置信水平为 95% 的置信区间;

(3) 求方差 σ^2 的置信水平为 95% 的置信区间.

A16. 已知某种电子管使用寿命 (单位: h) 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 未知, 从一批电子管中随机抽取 16 只, 检测结果得样本标准差为 300 h. 在置信水平 95% 下求:

(1) σ 的置信区间;

(2) σ 的单侧置信上限.

A17. 为了解某市两所高校学生的消费情况, 在两所高校各随机调查 100 人, 调查结果: 甲校学生月平均消费 803 元, 标准差 75 元; 乙校学生月平均消费 938 元, 标准差 102 元. 假设甲校学生月平均消费额 (单位: 元) $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$, 乙校学生月平均消费额 (单位: 元) $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$, μ_1,μ_2,σ^2 未知, 两样本相互独立, 求两校学生月平均消费额差值 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间和单侧置信下限.

A18. 某厂的一台瓶装灌装机, 每瓶的净重 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, 从中随机抽出 16 瓶, 称得其净重的平均值为 456.64 g, 标准差为 12.8 g; 现引进了一台新灌装机, 其每瓶的净重 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 从中随机抽出 12 瓶, 称得其净重的平均值为 451.34 g, 标准差为 11.3 g.

(1) 假设 $\sigma_1=13,\sigma_2=12$, 求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间;

(2) 假设 $\sigma_1=\sigma_2$ 未知, 求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间;

(3) 求 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 95% 的置信区间.

A19. 某超市负责人需要比较郊区 A 和郊区 B 居民的平均收入以确定合适的分店地址. 假设两郊区居民的收入均服从正态分布, 对两郊区居民分别进行抽样调查, 各抽取 64 户家庭, 计算得郊区 A 居民的人均年收入为 3.276 万元, 标准差为 0.203 万元; 郊区 B 居民的人均年收入为 3.736 万元, 标准差为 0.421 万元. 假设两个正态总体的方差不相等, 求两郊区居民人均年收入平均差值的置信水平为 95% 的近似置信区间.

(B)

B1. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{6x(\theta-x)}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 求 θ 的矩估计量 $\widehat{\theta}$, 并计算 $E(\widehat{\theta})$ 和 $\mathrm{Var}(\widehat{\theta})$.

B2. 设湖中有 N 条鱼 (N 未知), 现钓出 r 条, 做上记号后放回湖中, 一段时间后, 再钓出 S 条 ($S\geqslant r$), 结果发现其中 t 条有记号, 试用极大似然法估计湖中鱼的数量 N.

B3. 设总体 X 具有如下概率分布律:

X	a_1	a_2	a_3
p	θ	$\dfrac{1-\theta}{2}$	$\dfrac{1-\theta}{2}$

从总体 X 中取得样本容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 记其中取 a_1,a_2,a_3 的个数分别为 n_1,n_2,n_3, 其中 $n_1+n_2+n_3=n$, 求参数 θ 的矩估计量和极大似然估计量.

B4. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 未知, 抽取三个独立样本 (X_1,X_2), (Y_1,Y_2,Y_3), (Z_1,Z_2,Z_3,Z_4), S_1^2,S_2^2,S_3^2 分别是对应的样本方差. 设 $T=aS_1^2+bS_2^2+cS_3^2$, 其中 a,b,c 是在区间 $[0,1]$ 上取值的实数.

(1) 写出 T 是 σ^2 的无偏估计量的充要条件;

(2) 问 a,b,c 取何值时, T 为最有效估计量?

B5. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$\theta>0$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 4)$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\widehat{\theta}_1$ 和极大似然估计量 $\widehat{\theta}_2$;

(2) 在均方误差准则下, 判断哪个估计量更优;

(3) 判断两个估计量是否为 θ 的相合估计量.

B6. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$\theta>0$ 未知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 证明: 样本均值是 θ 的矩估计量, 也是极大似然估计量;

(2) 在形如 $c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 的估计中求 c, 使其在均方误差准则下最优;

(3) 判断由 (2) 得到的估计量是否为 θ 的相合估计量.

B7. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda x^{\lambda-1}}{\theta^\lambda}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta > 0, \lambda > 0$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) $\lambda = 3$, θ 为未知参数, 求 θ 的矩估计量, 并判断其是否为 θ 的无偏估计, 说明理由;

(2) $\theta = 3$, λ 为未知参数, 求 λ 的极大似然估计量, 并判断其是否为 λ 的相合估计, 说明理由.

B8. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geqslant \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$\theta > 0$ 未知, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的极大似然估计量 $\widehat{\theta}$;

(2) 求 $\widehat{\theta} - \theta$ 的密度函数;

(3) 判断 $\widehat{\theta} - \theta$ 是否可以取为关于 θ 的区间估计问题的枢轴量;

(4) 求 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信下限.

B9. 假设某一批日光灯的寿命服从正态分布 $N(\mu, 1\ 358)$, 从该总体中随机抽出 36 个个体, 计算得到置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间的长度为 5. 若保持置信水平不变, 要使得区间长度变为 2, 问样本容量应该为多少?

B10. 某餐厅为了解顾客对餐厅新开发的菜品的满意程度, 随机调查来餐厅就餐的顾客 80 人, 结果发现有 55 人满意, 求满意比例 p 的置信水平为 95% 的置信区间.

$$\frac{\cdots_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})}{n_{1\cdot}n_{2\cdot}n_{\cdot 1}n_{\cdot 2}}$$

注 2　列联表的独立性检验中所考虑的特性可以多于 2 个，此时称为多重列联表，其检验思想与二重列联表相类似，但计算会更加复杂.

注 3　在实际应用列联表的独立性检验时，一般要求检验结果个数 $n \geqslant 50$，且每一类的理论频数 $np_{i\cdot}p_{\cdot j}$(或 $n\widehat{p}_{i\cdot}\widehat{p}_{\cdot j}$) $\geqslant 5$.

注 4　当特性的指标为连续变量时，可采用类似 8.5 节的处理方式，先按可能取值范围分成有限个类，进行离散化处理，并统计各类频数，再结合列联表进行独立性检验.

思考题八

1. 如何理解假设检验问题中的两类错误？两类错误的概率有什么关系？如何理解奈曼－皮尔逊原则？
2. 如何理解小概率原理在假设检验中的应用？
3. 分别利用 P－值和显著性水平 α 说明检验的统计显著性.

4. 有关参数的假设检验和分布的假设检验中, 如何根据样本资料合理地设置原假设和备择假设?
5. 对于同一组样本资料, 在给定的显著性水平 α 下, 如果将右侧检验: $H_0:\theta\leqslant\theta_0$, $H_1:\theta>\theta_0$ 更换成左侧检验: $H_0:\theta\geqslant\theta_0$, $H_1:\theta<\theta_0$, 检验结果有什么区别?
6. 对于一个假设检验问题, 设 $\alpha_1>\alpha_2$, 如果出现 "在显著性水平 α_1 下拒绝原假设, 而在显著性水平 α_2 下接受原假设", 这矛盾吗? 如何理解此结果?
7. 假设检验和区间估计有什么关系?
8. 说明皮尔逊拟合优度 χ^2 检验的基本思想.

习题八 (A)

A1. 一家大型超市接到许多消费者投诉某品牌袋装土豆片 (标注 60 克/袋) 的重量不符合标准. 为了维护消费者和供应商的利益, 超市管理员决定对下一批袋装土豆片的平均重量 μ (单位: g) 进行抽样检验, 提出如下原假设和备择假设:

$$H_0:\mu\geqslant 60,\quad H_1:\mu<60.$$

(1) 分析这一假设检验问题的第 Ⅰ 类错误和第 Ⅱ 类错误;

(2) 从消费者和供应商的角度出发, 你认为他们分别希望控制犯哪类错误的概率?

A2. 电视机显像管的质量标准是平均使用寿命为 15 000 h. 某电视机厂宣称其生产的显像管平均寿命大大高于规定的标准. 为了对此说法进行验证, 随机抽取了 100 件该厂生产的显像管, 测得平均使用寿命为 15 525 h. 假设该厂生产的显像管的寿命 $X\sim N(\mu,1500^2)$, 利用假设检验推断是否有充分的理由认为该厂的显像管寿命显著地高于规定的标准 (显著性水平 $\alpha=0.05$).

(1) 给出检验的原假设、备择假设、检验统计量和拒绝域, 并根据样本资料作出判断;

(2) 计算 P- 值作出推断, 和 (1) 的判断结果是否一致?

A3. 食品厂用自动装罐机装罐头食品, 每罐的标准重量为 500 g. 为了检测机器是否正常工作, 每隔一定的时间进行抽样检验. 现随机抽得 10 罐, 测得平均重量为 498 g, 标准差为 6.5 g. 假定罐头的重量服从正态分布, 利用假设检验推断机器的工作是否正常 ($\alpha=0.02$).

(1) 给出检验的原假设、备择假设、检验统计量和拒绝域, 并根据样本资料作出判断;

(2) 计算 P- 值并作出推断, 和 (1) 的判断结果是否一致?

A4. 某高校管理部门为了解在校学生外卖消费情况, 随机抽查 100 名学生, 询问他们上个月的外卖消费额, 计算得平均消费额为 478 元, 消费标准差为 85 元. 设该校学生外卖消费额服

从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下, 检验如下假设:

$$H_0:\mu\leqslant 450,\quad H_1:\mu>450.$$

请给出检验统计量, 计算 P-值并作出推断.

A5. 一调查咨询公司对某论坛的日发帖量进行为期 2 周的调查, 记录每天的日发帖量, 计算得 14 天的日平均发帖量为 506 条, 标准差为 6.26 条. 假定该论坛的日发帖量服从正态分布, 问是否有充分的理由认为该论坛的日平均发帖量小于 510 条 ($\alpha=0.05$)?

A6. 某汽车厂商宣称他们生产的汽车平均每公升汽油可行驶 15 km 以上. 为验证该广告的真实性, 随机选取 10 辆汽车进行测试, 记录每辆车每公升汽油行驶的里程数, 得到如下数据:

14.8 15.1 16.9 14.8 13.7 12.9 13.5 14.9 15.4 13.5

假设数据服从正态分布, 利用假设检验分析该广告的可靠性 ($\alpha=0.05$).

A7. 根据《中国居民营养与慢性病状况报告 (2015)》, 全国 18 岁及以上成年男性的平均身高为 1.67 m. 现从我国某地区随机抽选 400 名成年男子, 测得身高的平均值为 1.69 m, 标准差为 0.042 m. 设该地区男子身高服从 $N(\mu,\sigma^2)$, 问该地区男子的身高是否显著高于全国平均水平 ($\alpha=0.05$)?

A8. 为了解某犬类疫苗注射后是否会使得犬的体温升高, 随机选择 9 只狗, 记录它们注射疫苗前后的体温 (单位: ℃):

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
注射前体温/℃	37.5	37.7	38.1	37.9	38.3	38.5	38.1	37.6	38.4
注射后体温/℃	37.7	38.0	38.2	37.9	38.2	38.8	38.0	37.5	38.8

设注射疫苗前后体温差服从正态分布, 试用成对数据的假设检验推断是否有充足的理由认为狗注射该疫苗后体温显著升高 ($\alpha=0.05$).

A9. 一减肥药广告宣称: 减肥者服用 2 周后, 体重会明显下降. 消费者协会为了对该减肥药的减肥效果进行评估, 随机抽选 10 位服用该减肥药的顾客, 记录其服用减肥药前和服用减肥药 2 周后的体重 (单位: kg):

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
服药前体重/kg	66	70	56	58	49	75	63	56	48	75
服药后体重/kg	68	65	54	59	45	70	60	50	47	68

设服药前后体重差服从正态分布, 试用成对数据的假设检验分析该广告是否可靠 ($\alpha=0.05$).

A10. 某经销代理商和乳业公司的合约里要求 225 mL 盒装牛奶的容量标准差不可超过 8 mL, 否则就予以退货. 现随机抽取 15 盒牛奶, 测得容量 (单位: mL) 如下:

230 223 228 229 220 215 217 231 220
223 230 224 226 228 227

假设样本来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$, 其中 $-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$ 均未知. 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 通过计算 P-值来检验假设

$$H_0 : \sigma \geqslant 8, \quad H_1 : \sigma < 8.$$

A11. 已知某厂生产的某种零件的长度 (单位: cm) 服从正态分布, 要求零件的标准长度为 15 cm, 标准差不超过 0.2 cm. 现从该厂中随机抽取 16 只零件, 测得长度如下:

15.1 14.9 14.8 14.6 15.2 14.8 14.9 14.6
14.8 15.1 15.3 14.7 15.0 15.2 15.1 14.7

利用假设检验推断这批零件是否符合标准要求 (α=0.05).

A12. 下列数据为 A, B 两个煤矿开采的每吨煤产生的热量记录 (单位: 4.186×10^3 J):

A 矿	8 500	8 330	8 480	7 960	8 030
B 矿	7 710	7 890	7 920	8 270	7 860

假设样本来自两个方差相等且相互独立的正态总体, 是否可以认为 A 矿的煤产生的热量要显著地大于 B 矿的煤 ($\alpha = 0.05$)?

A13. 为比较甲、乙两位电脑打字员的出错情况, 随机抽查甲输入的文件 8 页, 各页出错字数为

5 3 2 0 1 2 2 4

随机抽查乙输入的文件 9 页, 各页出错字数为

5 1 3 2 4 6 4 2 5

假设甲、乙两人页出错字数都服从正态分布.

(1) 检验甲、乙两人页出错数的方差是否相等 ($\alpha = 0.05$);

(2) 根据 (1) 的检验结果选择合适的检验方法, 推断打字员甲的平均页出错字数是否显著少于打字员乙 ($\alpha = 0.05$).

A14. 为了研究男性长跑运动员的心率是否低于一般健康男性, 现从省长跑队随机抽取 10 名男运动员, 从某高校随机抽取 25 名健康状况良好的男学生. 测得运动员心率的平均值为 60 次/分, 标准差为 6 次/分, 大学生心率的平均值为 73 次/分, 标准差为 13 次/分. 假设心率服从正态分布.

(1) 根据上面的资料检验两个群体心率的方差是否相等 ($\alpha = 0.05$);

(2) 根据 (1) 的检验结果选择合适的检验方法推断是否有充分的理由认为男性长跑运动员的心率显著低于一般健康男性 ($\alpha = 0.05$).

(B)

B1. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从总体中抽取样本容量为 16 的简单随机样本, 样本均值为 $\overline{X}$, 样本方差为 S^2.

(1) 若 $\sigma^2 = 1$, 在显著性水平为 0.05 下对于假设: $H_0 : \mu = 1$, $H_1 : \mu \neq 1$, 给出检验统计量和拒绝域, 并计算在 $\mu = 2$ 时犯第 Ⅱ 类错误的概率;

(2) 若 μ 未知, 在显著性水平为 0.05 下对于假设: $H_0 : \sigma^2 = 1$, $H_1 : \sigma^2 > 1$, 给出检验统计量和拒绝域, 并计算在 $\sigma^2 = 4$ 时犯第 Ⅱ 类错误的概率;

(3) 若根据样本值计算得 $\overline{x} = 1.54$, $s^2 = 1.44$, 求 (1) 和 (2) 中的 P-值.

B2. 对选择去英语国家继续深造的高校毕业生而言, 为了能申请到心仪的学校和更好地适应新环境的学习及生活, 需要尽可能地提高自己的英语水平. 某英语培训机构宣称, 参加该机构开办的为期 4 周的一对一培训课程后, TOEFL (托福) 平均成绩可提升 7 分. 一市场调查公司为了对该机构的培训效果进行评估, 随机选择了 12 位参加过该机构一对一培训课程的学生, 了解他们培训前后的 TOEFL 成绩, 具体如下:

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
培训前 TOEFL 成绩	76	85	78	90	104	87	91	83	95	108	93	84
培训后 TOEFL 成绩	89	92	90	93	106	96	100	90	100	110	100	95

设培训前后成绩差服从正态分布, 试用成对数据的假设检验分析该培训机构的宣称是否可靠 ($\alpha = 0.05$).

B3. 为了比较 A 高校和 B 高校教师的收入水平, 在两所高校具有副高职称的教师中各随机选择了 36 位和 49 位年龄在 $40 \sim 50$ 岁的教师, 了解他们上一年的税前工资收入. 计算得 A 高校教师的平均年工资收入为 28.8 万元, 标准差为 11.6 万元; B 高校教师的平均年工资收入为 22.4 万元, 标准差为 8.4 万元. 请选择合适的假设检验方法对下列问题进行推断:

(1) 从收入的差距程度来看, B 高校教师的收入差距程度是否显著低于 A 高校 ($\alpha = 0.05$)?

(2) 从收入的平均水平来看, 是否有充分的理由认为 A 高校教师的平均收入要比 B 高校至少多 5 万元 ($\alpha = 0.1$)?

B4. 火药生产厂家设计出一种新的火药生产方案, 要求使子弹发射的枪口速度为 900 m/s. 假设枪口速度 X (单位: m/s) 服从正

态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 现做了 8 次试验, 其速度分别为

893 886 897 903 901 898 909 889

(1) 求平均速度 μ 的置信水平为 95% 的置信区间;

(2) 根据区间估计的结果, 推断子弹发射的枪口速度是否与设计要求有显著差异;

(3) 利用假设检验, 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下, 计算 P-值并推断子弹发射的枪口速度是否与设计要求有显著差异; 结果和 (2) 是否一致?

B5. 某个八面体各面分别标有数字 1,2,3,4,5,6,7,8. 为检验各面是否匀称, 即各面出现的概率是否相等, 作 600 次投掷试验, 各数字朝上的次数如下:

数字	1	2	3	4	5	6	7	8
频数	72	83	78	90	70	71	64	72

在显著性水平 0.05 下, 检验假设 H_0: 该八面体是匀称的.

B6. 对某公交车站观察从 12 点到 15 点这 3 个小时前来等车的乘客情况, 将 2 min 作为一个单位时间, 记录 90 个单位时间内的等车人数, 数据如下:

人数	0	1	2	3	4	5	6	7	>7
频数	5	12	18	21	16	13	3	2	0

试利用上述数据推断在该公交车站的候车人数是否服从泊松分布 ($\alpha=0.05$).

B7. 一盒中有 10 个球, 其中红球有 a 个 (未知), 其余是白球, 采用有放回抽样取 3 个球作为一次实验, 这样的试验总共进行 200 次, 发现有 40 次没有取到红球, 有 85 次取到 1 个红球, 有 63 次取到 2 个红球, 有 12 次取到 3 个红球, 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设 $H_0: a=3$.

B8. 设 X 为前后两位客户到某自动取款机办理业务的时间间隔 (单位: min), 现观察了 120 次, 获得如下数据:

等候时间	$0\leqslant x\leqslant 5$	$5<x\leqslant 10$	$10<x\leqslant 20$	$20<x\leqslant 30$	$x>30$
频数	45	27	25	12	11

在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下, 检验假设 H_0: 前后两位客户的时间间隔服从均值为 10 的指数分布.

B9. 对某地区成年男子的身高 X (单位: cm) 进行观察, 随机抽取 200 名男子, 得到样本均值和样本标准差分别为 $\bar{x}=169.9$, $s=9.6$, 其他资料如下:

身高	$x\leqslant 163$	$163<x\leqslant 167$	$167<x\leqslant 171$	$171<x\leqslant 175$	$175<x\leqslant 179$	$179<x\leqslant 183$	$x>183$
频数	41	34	40	33	27	16	9

在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验假设 H_0: 该地区成年男子的身高服从正态分布.

B10. 考察某特定人群，其收入与文化消费支出有无关联. 把收入分为低、中、高三档，文化消费支出分成低、高两档. 从中随机抽取 200 人，得结果如下:

收入	文化消费支出		合计
	低	高	
低	64	16	80
中	36	16	52
高	60	8	68
合计	160	40	200

在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验假设

$$H_0:\ \text{收入与文化消费支出相互独立.}$$

第 1 章

思考题一

1. 都一定成立.
2. $f_n(A)$ 是一个变化的量 (可知为第 2 章中讲的随机变量), $P(A)$ 为一定数; 当 n 充分大时, 频率趋于概率; 不一定成立.
3. $P(AB)$ 表示事件 A 和事件 B 同时发生的概率; $P(B|A)$ 表示在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率, 即表示在缩小的样本空间 A 中, A 和 B 同时发生的概率.
4. 一般不等于 1.
5. 不能同时成立.

习题一

(A)

A1. (1) 9; (2) $A=\{(0,a),(1,a),(2,a)\}$; (3) $B=\{(0,a),(0,b),(0,c)\}$.

A2. (1) $A=\{1,2\}$, $B=\{4,5,6\}$;
(2) $A=\{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(4,6),(6,4)\}$, $B=\{(3,1),(6,2)\}$;
(3) $A=\{(x,y):0<x<0.5,x\leqslant y<1-x\}$, $B=\{(x,y):0<x<0.5,0.5<y<1-x\}$.

A3. (1) $S=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$;
(2) $S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$;
(3) $S=\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$;
(4) $S=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$.

A4. (答案不唯一)
(1) $AB\cup AC\cup BC$; (2) $\overline{AB\cup AC\cup BC}$; (3) $\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$; (4) $\overline{ABC}$.

A5. (1) 0.5; (2) 0.3.

A6. (1) $P(A\cup B)=0.9$, $P(A\overline{B})=0.5$; (2) $P(A\cup B)=0.5$, $P(A\overline{B})=0.1$.

A7. (1) 0.8; (2) 0.2; (3) 0.5.

A8. (1) 0.2; (2) 0.4; (3) 0.7.

A9. (1) $\frac{3}{5}$; (2) $\frac{14}{15}$.

A10. (1) $\frac{5}{6}$; (2) $\frac{1}{9}$; (3) $\frac{2}{15}$.

A11. $\frac{1\,343}{1\,728}\approx 0.777\,2$.

A12. 无放回抽样: (1) $\frac{28}{45}$; (2) $\frac{16}{45}$; (3) $\frac{4}{5}$.
有放回抽样: (1) $\frac{16}{25}$; (2) $\frac{8}{25}$; (3) $\frac{4}{5}$.

A13. (1) $\frac{28}{435}$; (2) $\frac{1}{435}$.

A14. (1) $\frac{12}{35}$; (2) $\frac{1}{35}$; (3) $\frac{2}{35}$.

A15. (1) $\frac{1}{9}$; (2) $\frac{7}{72}$.

A16. $\frac{80}{243}$.

A17. (1) $\frac{3}{4}$; (2) $\frac{3}{5}$; (3) $\frac{2}{3}$; (4) $\frac{4}{5}$.

A18. (1) $\frac{6}{25}$; (2) $\frac{12}{25}$; (3) $\frac{21}{25}$.

A19. (1) $\frac{7}{9}$; (2) $\frac{2}{5}$; (3) $\frac{2}{9}$.

A20. (1) $\frac{17}{30}$; (2) $\frac{13}{35}$; (3) $\frac{56}{105}$.

A21. $\frac{30}{31}$.

A22. $p_{甲}=\frac{51}{128}$, $p_{乙}=\frac{45}{128}$, $p_{丙}=\frac{32}{128}$, 甲工厂.

A23. (1) $\frac{37}{80}$; (2) $\frac{1}{37}$.

A24. (1) $\frac{11}{50}$; (2) $\frac{7}{13}$.

A25. (1) $\frac{727}{50\,000}\approx 0.014\,5$; (2) $\frac{441}{727}\approx 0.606\,6$.

A26. 0.24.

A27. 提示：用条件概率公式展开.

A28. (1) $\frac{2}{25}$; (2) $\frac{41}{50}$; (3) $\frac{2}{5}$.

A29. $p+p^2-p^3$.

A30. (1) $\frac{16}{25}$; (2) $\frac{124}{125}$.

A31. (1) 对; (2) 错; (3) 错; (4) 对.

A32. (1) $P(A_i)=p(1-p)^{i-1}$, $i=1,2,\cdots$, $P(B_4)=p^2(1-p)$; (2) $p^2(1-p)$; (3) p.

A33. (1) 0.052 6; (2) 0.998 4.

A34. 14.

(B)

B1. (1) 0.1; (2) 0.6; (3) 0.3.

B2. $\frac{1}{1\,225}$.

B3. $\frac{43}{50}$.

B4. (1) $\frac{1}{9}$; (2) $\frac{1}{2}$.

B5. $\frac{176}{211}$.

B6. (1) $\frac{13}{24}$; (2) $\frac{2\,825}{7\,163}$.

B7. (1) $\alpha=p_1p_2p_3(1-p_4)+p_1p_2(1-p_3)p_4+p_1(1-p_2)p_3p_4+(1-p_1)p_2p_3p_4+p_1p_2p_3p_4$;

(2) $\beta=\frac{p_1p_2p_3p_4}{\alpha}$; (3) $\gamma=3\alpha^2(1-\alpha)$.

B8. (1) $\frac{43}{500}$; (2) $\frac{1\,065\,103}{5\,000\,000}$.

B9. $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$.

B10. $\frac{10}{71}$.

B11. $\frac{5}{14}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{2}{7}$.

第 2 章

思考题二

1. 不一定. 如果一个随机变量在开区间内分布函数连续, 而在该区间端点处分布函数跳跃, 那么它是既非连续型又非离散型的随机变量.
2. 不对. 分布函数在正无穷大处的极限是 1, 而且分布函数是 $\{X \leqslant x\}$ 的概率, 因此 X 的分布函数在 $x \geqslant 1$ 时的值应当为 1, 即 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$
3. D. 选项 A 不满足密度函数的性质 (1), 选项 B 和 C 不满足密度函数的性质 (2).
4. B. 选项 A 不满足分布函数单调不减, 选项 C 不满足分布函数右连续, 选项 D 不满足分布函数取值在区间 $[0,1]$ 上.
5. 仅与 σ 有关. 因为 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 所以 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. 于是

$$P\{|X-\mu|<\delta\}=P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|<\frac{\delta}{\sigma}\right\}=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-1.$$

6. 不可以. 指数分布的无记忆性是指只要元件没有损坏, 它能再使用一段时间 Δt 的概率与一个新元件使用时间 Δt 的概率一样, 是有条件限制的.

习题二

(A)

A1. (1) $P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}, P\{X=2\}=\dfrac{1}{3}, P\{X=3\}=\dfrac{1}{6}$;

(2)

X	0	1	2	3
p	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

(3) $P\{X=0\}=\dfrac{3}{10}, P\{X=1\}=\dfrac{3}{5}, P\{X=2\}=\dfrac{1}{10}$;

(4) $P\{X=1\}=\dfrac{2}{5}, P\{X=2\}=\dfrac{6}{25}, P\{X=3\}=\dfrac{9}{25}$.

A2. $c=0.1, P\{1.5<X\leqslant 3\}=0.5$.

A3. (1) $\dfrac{44}{125}=0.352$; (2) $\dfrac{117}{125}=0.936$.

A4. 0.5.

A5. 7 次.

A6. $P\{X\leqslant 2\}=5e^{-2}, P\{X\geqslant 2\}=1-3e^{-2}, P\{X\leqslant 1|X\leqslant 2\}=0.6$.

A7. (1) $1-13e^{-3}$; (2) $\dfrac{99}{8}e^{-3}$.

A8. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.4, & 0\leqslant x<2,\\ 0.9, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3,\end{cases}$ $P\{1\leqslant X<3\}=0.5$.

A9. $P\{X=-1\}=0.3, P\{X=1\}=0.4, P\{X=3\}=0.3$.

A10. (1) $c=0.5$; (2) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x-\dfrac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2;\end{cases}$ (3) $P\{0.5<X\leqslant 1\}=\dfrac{5}{16}$.

A11. (1) $c=2$; (2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}, & x>2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ (3) $P\{X\leqslant 4\}=0.5$.

A12. $\dfrac{3}{4}$.

A13. $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & -1<x<3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $P\{Y=k\}=C_n^k\left(\dfrac{3}{4}\right)^k\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$.

A14. (1) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-0.2x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ (2) $P\{X>5\}=e^{-1}$; (3) $P\{X\leqslant 10|X>5\}=1-e^{-1}$.

A15. (1) $P\{X\leqslant 0\}=1-\Phi(0.5)\approx 0.308\,5$, $P\{|X-1|\leqslant 2\}=2\Phi(1)-1\approx 0.682\,6$;
(2) $a=1$;
(3) $P\{|X|\leqslant 2\}=\Phi(0.5)-\Phi(-1.5)\approx 0.624\,7$.

A16. 1.02.

A17. (1)

Y	-3	-1	1	3
p	0.3	0.1	0.2	0.4

Z	0	1	4
p	0.1	0.5	0.4

(2) $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 0.1, & 0\leqslant z<1,\\ 0.6, & 1\leqslant z<4,\\ 1, & z\geqslant 4.\end{cases}$

A18. (1) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{16}, & 2<y<6,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ (2) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2-y}{4}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(3) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}, & 1<y<9,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

A19. $Y\sim N(0,1)$, $Z\sim N(1,4)$.

(B)

B1. $P\{X=i\}=\dfrac{C_{i-1}^1C_{7-i}^1}{C_7^3}=\dfrac{(i-1)(7-i)}{35}$, $i=2,3,4,5,6$.

B2. (1)

X	0	1	2	4
p	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{4}{25}$	$\dfrac{4}{125}$	$\dfrac{1}{125}$

(2) $\dfrac{1}{125}$; (3) $\dfrac{1}{5}$.

B3. $P\{X=0\}=\dfrac{1}{5}$, $P\{X=1\}=\dfrac{3}{5}$, $P\{X=2\}=\dfrac{1}{5}$.

B4. (1) $(1-10^{-7})^n$; (2) $(1-10^{-6})^n$.

B5. (1) 0.882 4; (2) 0.367 4; (3) 0.127 4; (4) 0.260 1.

B6. (1) $\frac{128}{625}=0.2048$; (2) $\frac{2304}{3125}\approx 0.7373$; (3) $\frac{181}{3125}\approx 0.0579$.

B7. $P\{X=0\}=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$,

$P\{X=1\}=p_1(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)p_2(1-p_3)+(1-p_1)(1-p_2)p_3$,

$P\{X=2\}=(1-p_1)p_2p_3+p_1(1-p_2)p_3+p_1p_2(1-p_3)$, $P\{X=3\}=p_1p_2p_3$;

$P\{Y=0\}=p_1$, $P\{Y=1\}=(1-p_1)p_2$,

$P\{Y=2\}=(1-p_1)(1-p_2)p_3$, $P\{Y=3\}=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$.

B8. (1) $P\{X=i\}=(1-p)^{i-1}p,\ i=1,2,3,4,\ P\{X=5\}=(1-p)^4$;

(2) $P\{X\leqslant 2.5\}=p(2-p)$.

B9. (1) $1-2\mathrm{e}^{-1}$; (2) $\frac{2}{3\mathrm{e}-6}$.

B10. (1) $1-11\mathrm{e}^{-10}$; (2) $\mathrm{e}^{-0.5}$.

B11. (1) $1-5.5\mathrm{e}^{-4.5}$; (2) $\frac{3.2}{\mathrm{e}^{3.2}-1}$.

B12. (1) $\frac{324}{5}\mathrm{e}^{-6}$; (2) $\frac{324}{5\mathrm{e}^6-575}$.

B13. $1-4\mathrm{e}^{-3}$.

B14. (1) $P\{X=k\}=\frac{\mathrm{C}_3^k\mathrm{C}_7^{3-k}}{\mathrm{C}_{10}^3},\quad k=0,1,2,3$;

(2) $P\{Y=k\}=\mathrm{C}_3^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}=\frac{\mathrm{C}_3^k}{8},\quad k=0,1,2,3$;

(3) $P\{Z=k\}=\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\frac{1}{10}=\frac{9^{k-1}}{10^k},\quad k=1,2,\cdots$;

(4) $\frac{3}{16}$.

B15. (1) $P\{X=k\}=\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{4^{k-1}}{5^k},\quad k=1,2,\cdots$;

(2) $P\{X=k\}=\frac{1}{5},\quad k=1,2,3,4,5$.

B16. (1) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{x-1}{2}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3;\end{cases}$ (2) $P\{X\leqslant 2.5\}=\frac{3}{4}$.

B17. (1) $\frac{3}{16}$; (2) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ -\frac{1}{16}x^3+\frac{3}{4}x, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2;\end{cases}$ (3) $\frac{11}{16}$; (4) $\frac{75625}{524288}\approx 0.1442$.

B18. (1) $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$; (2) $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ (3) $\frac{5}{8}$.

B19. (1) $\frac{3}{5}$; (2) $\frac{3}{5}$; (3) $\frac{1}{4}$.

B20. (1) $\Phi(2.5) \approx 0.993\,8$; (2) $1-\Phi(1.48) \approx 0.069\,4$; (3) $2\Phi(1)-1 \approx 0.682\,6$;
(4) $2-2\Phi(2) \approx 0.045\,5$.

B21. $1-\Phi(0.5) \approx 0.308\,5$.

B22. (1) $1-\Phi(0) = 0.5$; (2) $2\Phi(1)-1 \approx 0.682\,6$; (3) $\Phi(0.4) \approx 0.655\,4$.

B23. (1) 0.111 4; (2) 0.244 5; (3) 0.298 2.

B24. (1) 0.064 1; (2) 0.660 7; (3) 0.972 0.

B25. $\mu = 14\,109$, $\sigma = 2\,498$.

B26. $x_1 = 15$, $x_2 = 17$.

B27. (1) $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$; (2) $P\left\{X > \frac{1}{2}\right\} = 1-\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0.239\,8$.

B28. (1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{8}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$ (2) $e^{-1.25}$; (3) $e^{-1} - e^{-2}$.

B29. (1) $0.4e^{-2} + 0.6e^{-1}$; (2) $e^{-\frac{2}{3}}$; (3) $\dfrac{0.4e^{-\frac{1}{3}} + 0.6e^{-\frac{1}{6}}}{0.4e^{-\frac{1}{9}} + 0.6e^{-\frac{1}{18}}}$.

B30. (1) $f(x) = \begin{cases} 0.2e^{-0.2x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$ (2) $e^{-1} - e^{-2}$; (3) $(1-e^{-1})^6(1+6e^{-1})$.

B31. (1) $3e^{-3}(1-e^{-1.5})$; (2) $3e^{-3} - 2e^{-4.5}$.

B32. $P\{Y=2\} = \frac{27}{125}$, $P\{Y=8\} = \frac{147}{500}$, $P\{Y=10\} = \frac{49}{100}$.

B33. (1) $c = \frac{1}{9}$; (2) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{27}\left(4 - \frac{y^2}{9}\right), & -3 < y < 6, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

(3) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ -\frac{2}{27}z^3 + \frac{8}{9}z, & 0 \leqslant z < 1, \\ -\frac{1}{27}z^3 + \frac{4}{9}z + \frac{11}{27}, & 1 \leqslant z < 2, \\ 1, & z \geqslant 2, \end{cases}$ $f_Z(z) = \begin{cases} -\frac{2}{9}z^2 + \frac{8}{9}, & 0 < z < 1, \\ -\frac{1}{9}z^2 + \frac{4}{9}, & 1 < z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

B34. (1) $F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$ (2) $e^{-\lambda t}$.

B35. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

B36. $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -1, \\ \frac{4}{3} - \frac{4\arccos y}{3\pi}, & -1 \leqslant y < 0, \\ 1 - \frac{2\arccos y}{3\pi}, & 0 \leqslant y < 1, \\ 1, & y \geqslant 1. \end{cases}$

B37. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi y\sigma^2}}\left[e^{-\frac{(\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{y}+\mu)^2}{2\sigma^2}}\right], & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

B38. (1) $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{6}$; (2) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2y^3}{3}+\frac{y}{3}, & 0<y<\sqrt{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

B39. (1) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ (2) $f_Z(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{z-\frac{e^{2z}}{2}}, \quad -\infty<z<+\infty.$

第 3 章

思考题三

1. 联合分布可以决定边际分布, 而边际分布不能决定联合分布.
2. (3) 正确.
3. 不正确.
4. (2) 正确.
5. 第一个说法正确, 第二个说法不一定正确.

习题三

(A)

A1. (1) 0.1; (2) 0.6;

(3) $P\{X=0\}=0.5$, $P\{X=1\}=0.2$, $P\{X=2\}=0.3$;

$P\{Y=0\}=0.2$, $P\{Y=1\}=0.2$, $P\{Y=2\}=0.3$, $P\{Y=3\}=0.3$.

A2. (1) $a=0.1, b=0.2$; (2) $a=\frac{2}{15}, b=0.1$; (3) $a=0.05, b=0.35$.

A3. $P\{X=2,Y=4\}=P\{X=4,Y=2\}=\frac{6}{25}$, $P\{X=3,Y=3\}=\frac{13}{25}$;

$P\{X=2\}=P\{X=4\}=\frac{6}{25}$, $P\{X=3\}=\frac{13}{25}$.

A4. 无放回抽样:

X	Y		$P\{X=i\}$
	0	1	
0	0.1	0.3	0.4
1	0.3	0.3	0.6
$P\{Y=j\}$	0.4	0.6	

有放回抽样:

X	Y		$P\{X=i\}$
	0	1	
0	0.16	0.24	0.4
1	0.24	0.36	0.6
$P\{Y=j\}$	0.4	0.6	

A5. $a=0.3, b=0.2$.

A6. $a=0.2, b=0.3, c=0.2$.

X	1	2
p	0.6	0.4

Y	-1	0	1
p	0.3	0.2	0.5

A7. (1) $P\{Y=1|X=1\}=P\{Y=2|X=1\}=0.5$;

(2) $P\{X=0|Y=1\}=\frac{1}{3}$, $P\{X=1|Y=1\}=\frac{2}{3}$.

A8. (1)

X	Y		
	0	1	2
0	0.2	0.1	0.1
1	0	0.4	0.2

(2) $P\{Y=0|X=0\}=0.5$, $P\{Y=1|X=0\}=P\{Y=2|X=0\}=0.25$.

A9. (1)

X	Y						$P\{X=i\}$
	1	2	3	4	5	6	
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{6}$
$P\{Y=j\}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

(2)

X	1	2	3	4	5	6
$P\{X=k|Y=6\}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{6}{11}$

A10. (1)

X	Y		
	0	a	$2a$
0	0.6	0	0
1	$0.3(1-p)$	$0.3p$	0
2	$0.1(1-p)^2$	$0.2p(1-p)$	$0.1p^2$

(2) $P\{Y=0|X=1\}=1-p$, $P\{Y=a|X=1\}=p$.

A11. (1) $F(0,1)=0.2$, $F(1,1.5)=0.4$, $F(2.1,1.1)=0.6$; (2) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.2, & 0\leqslant x<1,\\ 0.6, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$

A12. (1)

X	Y	
	0	1
1	0.1	0.2
2	0.3	0.4

(2) $F_{X|Y}(x|0)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 0.25, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$

A13. (1)

X	Y	
	0	1
0	0.35	0.35
1	0.25	0.05

(2) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.7, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1;\end{cases}$ (3) $F_{Y|X}(y|1)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{5}{6}, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$

A14. (1) $\dfrac{3}{4}$; (2) $\dfrac{13}{64}$; (3) $\dfrac{5}{12}$; (4) $\dfrac{9}{16}$.

A15. (1) $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}0.5, & 0<y<2,\\ 0, & 其他;\end{cases}$ (2) $P\{Y\leqslant 2X\}=\dfrac{2}{3}$.

A16. (1) $c=3$;

(2) $f_X(x)=\begin{cases}6(x-1)(2-x), & 1<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3(y-1)^2}{2}, & 1<y\leqslant 2,\\ \dfrac{3(3-y)^2}{2}, & 2<y<3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

A17. (1) $f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0;\end{cases}$

(2) 当 $x>0$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

(3) 是均匀分布.

A18. (1) $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{2}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1+y}{4}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

(2) 当 $0<y<2$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2x+y}{1+y}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

当 $0<x<1$ 时, $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{2x+y}{4x+2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(3) $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{5}{32}$.

A19. (1) $f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda x}e^{-y/x}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(2) $F_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}1-e^{-y/x}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0;\end{cases}$

(3) e^{-1}.

A20. (1) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{5(1-y^4)}{8}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(2) 当 $-1<y<1$ 时, $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^4}, & y^2<x<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(3) 0.8.

A21. (1) $f(x,y)=\begin{cases}0.5, & 0<y<x<2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ (2) 0.5; (3) 0.25.

A22. (1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(2) 当 $0<y<1$ 时, $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(1-x)\ln(1-y)}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

A23. (1) $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty<x<+\infty$, $f_Y(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{4}}$, $-\infty<y<+\infty$;

(2) $f_{Y|X}(y|0)=\dfrac{1}{\sqrt{3\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{3}}$, $-\infty<y<+\infty$;

(3) 0.5.

A24. X 与 Y 不独立. 因为 $P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$.

A25. $a=0.1$, $b=0.2$, $c=0.1$.

A26. (1) 不独立; (2) 相互独立; (3) 不独立.

A27. (1) $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{4\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ (2) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$; (3) 不独立.

A28. $f_X(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$, $-\infty<x<+\infty$, $f_Y(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{8}}$, $-\infty<y<+\infty$;

X 与 Y 相互独立.

A29. (1) $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty<x<+\infty$, $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$, $-\infty<y<+\infty$;

(2) X 与 Y 相互独立.

A30. $Z\sim B\left(3,\dfrac{2}{5}\right)$, 即 $P\{Z=0\}=\dfrac{27}{125}$, $P\{Z=1\}=\dfrac{54}{125}$, $P\{Z=2\}=\dfrac{36}{125}$,

$P\{Z=3\}=\dfrac{8}{125}$.

A31. $f_Z(t)=0.5f(t)+0.3f(t-1\,000)+0.2f(t-5\,000)$.

A32.

Z	1	2	3	4	5
p	0.04	0.14	0.3	0.32	0.2

M	1	2	3
p	0.1	0.5	0.4

N	0	1	2
p	0.2	0.4	0.4

A33.

Z	0	1	2	4
p	0.4	0.1	0.3	0.2

M	1	2
p	0.3	0.7

N	0	1	2
p	0.4	0.4	0.2

A34. $f_Z(t)=\begin{cases}te^{-t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$ $f_M(t)=\begin{cases}2e^{-t}(1-e^{-t}), & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$ $f_N(t)=\begin{cases}2e^{-2t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$

A35. (1) $f_Z(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{4}}$; (2) $1-(1-\Phi(1))^2=0.974\,8$; (3) $(\Phi(1))^2=0.707\,8$.

A36. $f_Z(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}t, & 0<t\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

A37.

X	Z	
	0	1
0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$
1	p^2	$p(1-p)$

A38. $f_M(t)=\begin{cases}3t^2, & 0<t<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $f_N(t)=\begin{cases}1+2t-3t^2, & 0<t<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(B)

B1. (1)

X	Y		
	1	2	3
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

(2) $P\{Y=1\}=\dfrac{41}{90}$, $P\{Y=2\}=\dfrac{19}{45}$, $P\{Y=3\}=\dfrac{11}{90}$;

(3) $P\{X=0|Y=1\}=\dfrac{6}{41}$, $P\{X=1|Y=1\}=\dfrac{35}{41}$.

B2. (1) $P\{X=i,Y=j\}=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}C_i^j0.1^j0.9^{i-j}$, $i=0,1,\cdots,j=0,1,\cdots,i$;

(2) $P\{Y=i\}=\dfrac{e^{-0.1\lambda}(0.1\lambda)^i}{i!}$, $i=0,1,2,\cdots$.

B3. $F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ 0.1+0.8xy, & 0\leqslant x<1, 0\leqslant y<1,\\ 0.1+0.8x, & 0\leqslant x<1, y\geqslant 1,\\ 0.1+0.8y, & x\geqslant 1, 0\leqslant y<1,\\ 1, & x\geqslant 1, y\geqslant 1.\end{cases}$

B4. (1) 6; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $\frac{7}{8}$.

B5. (1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2(4-y)}{(3-x)^2}, & 1<x<2, x+1<y<4,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $P\{Y<3\}=\frac{1}{2}$;

(2) $f_Y(y)=\begin{cases}y-2, & 2<y<3,\\ 4-y, & 3<y<4,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(3) $\frac{1}{3}$.

B6. $f_Z(t)=\begin{cases}\frac{2(m-t)}{m^2}, & 0<t<m,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

B7. $F_T(t)=\begin{cases}1-2e^{-2\lambda t}+e^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$ $f_T(t)=\begin{cases}4\lambda e^{-2\lambda t}-3\lambda e^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$

B8. (1) $P\{Z=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$;

(2) $P\{W=k\}=C_{m+n}^k p^k(1-p)^{m+n-k}, k=0,1,\cdots,m+n$.

B9. $f_Z(t)=\frac{1}{2a}\left[\Phi\left(\frac{t+a-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{t-a-\mu}{\sigma}\right)\right], -\infty<t<+\infty$.

B10. $f_Z(t)=\begin{cases}\frac{t(3-t)}{3}, & 0<t\leqslant 1,\\ \frac{3-t}{3}, & 1<t\leqslant 2,\\ \frac{(3-t)^2}{3}, & 2<t\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

B11. (1) $\frac{3}{8}$; (2) $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<48,\\ \frac{z}{32}-\frac{3}{2}, & 48\leqslant z<60,\\ \frac{9z}{160}-3, & 60\leqslant z<64,\\ \frac{z}{40}-1, & 64\leqslant z<80,\\ 1, & z\geqslant 80.\end{cases}$

B12. (1) $1-e^{-10\lambda}-10\lambda e^{-10\lambda}$; (2) $1-e^{-10\lambda}(1+\lambda)^{10}$; (3) $1-\frac{e^{-10\lambda}[(1+\lambda)^{10}-\lambda^{10}]}{1-(1-e^{-\lambda})^{10}}$.

B13. (1) $f_T(t)=\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)e^{-\lambda_1 t-\lambda_2 t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0;\end{cases}$

(2) $f_T(t)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}-(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0;\end{cases}$

(3) 当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 时, $f_T(t)=\begin{cases}\lambda^2 t\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0;\end{cases}$

当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时, $f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}), & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$

第 4 章

思考题四

1. 不正确. 随机变量 X 的数学期望按定义应该是

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{-1} x\cdot 0\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0} x\cdot(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} x\cdot(1-x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0\mathrm{d}x.$$

2. 随机变量 X 与 Y 同分布, 那么它们的任意阶矩 (如果存在) 全部相等. 反之, 若有 $E(X)=E(Y)$ 且 $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)$, 不能推出随机变量 X 与 Y 的分布一定相同. 反例: 当 $X\sim P(1)$, $Y\sim N(1,1)$ 时, $E(X)=E(Y)=1$ 且 $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=1$, 但显然两者的分布不一样.
3. 方差是 2×2.5^2.
4. 两个随机变量如果相互独立, 那么它们一定不相关; 反之则不然. 当它们的联合分布为二元正态分布时, 相互独立和不相关等价.
5. (1) 对于 $n\geqslant 1$, 有 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)$ 成立, 但 $\mathrm{Var}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)$ 不一定成立, 因为 $\mathrm{Var}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+\sum\limits_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$, 且只有当 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 两两不相关时, $\mathrm{Var}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)$ 才成立;

   (2) 若 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 相互独立, 则对于 $n\geqslant 1$, 有 $E\left(\prod\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}E(X_i)$ 成立, 但 $\mathrm{Var}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)$ 不一定成立, 仅有

$$\mathrm{Var}\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)=E\left(\prod_{i=1}^{n}X_i^2\right)-\left(E\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)\right)^2$$
$$=\prod_{i=1}^{n}E(X_i^2)-\prod_{i=1}^{n}(E(X_i))^2.$$

6. 不正确. 应为 $\mathrm{Var}(X-2Y)=\mathrm{Var}(X)+(-2)^2\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,-2Y)=5-4\mathrm{Cov}(X,Y)$.
7. 不正确. 根据定理 4.1.1, $E\left(\dfrac{1}{X}\right)=\displaystyle\int_1^3\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{\ln 3-\ln 1}{2}=\ln\sqrt{3}$.

习题四

(A)

A1. (1) 无放回抽样: $E(X)=\frac{9}{5}$; (2) 有放回抽样: $E(X)=\frac{9}{5}$.

A2. $E(X)=\frac{13}{6}$, $P\{X>E(X)\}=\frac{155}{288}$.

A3. $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{6}$.

A4. (1) $\frac{3}{2}$; (2) $\frac{4}{5}$; (3) $\frac{17}{10}$.

A5. $E(X)=\frac{7}{12}$, $E(Y)=\frac{7}{6}$, $E(XY)=\frac{2}{3}$.

A6. $\frac{4}{5}$.

A7. (1) 无放回抽样: $\mathrm{Var}(X)=\frac{9}{25}$; (2) 有放回抽样: $\mathrm{Var}(X)=\frac{18}{25}$.

A8. $\frac{3}{5}$.

A9. $\frac{13}{5}$.

A10. (1) $E(X)=\frac{6}{5}$, $\mathrm{Var}(X)=\frac{19}{25}$; (2) $E(X)=\frac{13}{12}$, $\mathrm{Var}(X)=\frac{35}{144}$.

A11. $\frac{7}{144}$.

A12. $E(2X-Y)=\frac{16}{5}$, $\mathrm{Var}(2X-Y)=\frac{212}{25}$, $E[(2X-Y)^2]=\frac{468}{25}$.

A13. 6.

A14. $a=-1, b=5$.

A15. $\mathrm{Cov}(X,Y)=-\frac{1}{25}$, $\rho_{XY}=-\frac{\sqrt{534}}{267}\approx-0.086\,5$.

A16. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{10}$, $\rho_{XY}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

A17. 1.4.

A18. X 与 Y 不相关, X 与 Y 不独立.

A19. $a=1$.

(B)

B1. $\frac{nN}{M}$.

B2. 应选择方案二, 因为方案二的平均年薪比较高.

B3. 6.

B4. $E(\eta_n)=np$, $E(S_n)=n(2p-1)$.

B5. 3.

B6. (1) 0.5; (2) 0.5; (3) 0.25.

B7. (1) $\frac{1}{2}+q(1-q)$;

(2) 当 Q 为棍子的中点时, 包含 Q 点的棍子平均长度达到最大.

B8. 20 min.

B9. 当 $k\leqslant 10$ 时, $0.8^k-\frac{1}{k}>0$, 第二种方法检验的平均次数少一些; 当 $k>10$ 时, $0.8^k-\frac{1}{k}<0$, 第一种方法检验的平均次数少一些.

B10. $\dfrac{1-e^{-8\lambda}}{\lambda}$.

B11. (1) $E(X)=E(Y)=0$; (2) $\dfrac{2r}{3}$.

B12. (1) 10; (2) 6.

B13. 505.

B14. $E(X)=\dfrac{n^n-(n-1)^n}{n^{n-1}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}E\left(\dfrac{X}{n}\right)=1-e^{-1}\approx 0.63$.

B15. $\dfrac{n-1}{n+1}$.

B16. Y 服从参数为 λp 的泊松分布, 数学期望为 λp.

B17. (1) $\dfrac{x+2}{2}$; (2) $\dfrac{3}{2}$.

B18. $\dfrac{26}{63}$.

B19. $E(X^k)=\dfrac{\Gamma(k+\alpha)}{\lambda^k\Gamma(\alpha)}$ $(k\geqslant 1)$, $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$.

B20. $\mathrm{Var}(X)=2$, $\mathrm{Var}(|X|)=1$.

B21. (1) 6, $\dfrac{141}{25}$; (2) 98, $\dfrac{49}{25}$.

B22. (1) $\dfrac{3}{4}$; (2) $E(X\cdot(-1)^Y)=0$, $\mathrm{Var}(X\cdot(-1)^Y)=\dfrac{1}{2}$.

B23. (1) $E(Z)=\dfrac{1}{6}$, $Cv(Z)=1$;

(2) $E(Z)=\dfrac{7}{12}$, $Cv(Z)=\dfrac{\sqrt{33}}{7}$;

(3) $E(Z)=\dfrac{3}{4}$, $Cv(Z)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

B24. (1) $\mathrm{Cov}(X,|X|)=0$, X 与 $|X|$ 不相关;

(2) X 与 $|X|$ 不独立.

B25. (1) $\rho_{XY}=\dfrac{1}{3}$, X 与 Y 不独立且正相关;

(2) X^2 与 Y^2 相关系数为零, X^2 与 Y^2 相互独立且不相关.

B26. $-\dfrac{1}{5}$, 两者为负相关关系.

B27. (1)

A	B		
	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

(2) $\dfrac{6+\sqrt{3}+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{16}\approx 0.966$;

(3) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 负相关.

B28. $\dfrac{k-n_0}{k}$.

B29. (1) 提示: 利用全概率公式计算 ξ 的分布函数;

(2) $\rho_{X\xi}=2p-1$, 故当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, X 与 ξ 不相关; 当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时, X 与 ξ 正相关; 当 $p<\dfrac{1}{2}$ 时, X 与 ξ 负相关; 当 $0<p<1$ 时, X 与 ξ 不独立.

B30. $\sqrt{\dfrac{k}{n}}$.

B31. (1)

X	Y	
	0	1
0	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{1}{5}$
1	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

X 与 Y 不独立;

(2) $\dfrac{1}{25}$, 正相关.

B32. (1) $\xi\sim N(-b,a^2+4b^2)$, $\eta\sim N(a,4a^2+b^2)$; ξ 的标准化变量为 $\xi^*=\dfrac{\xi+b}{\sqrt{a^2+4b^2}}$, η 的标准化变量为 $\eta^*=\dfrac{\eta-a}{\sqrt{4a^2+b^2}}$; ξ 与 η 的相关系数为 $\dfrac{-5ab}{\sqrt{(a^2+4b^2)(4a^2+b^2)}}$;

(2) $-\dfrac{1}{b}\sqrt{(a-b)^2+3b^2}$;

(3) a;

(4) 当 $b=-2a$ 或 $a=-2b$ 时, ξ 与 η 不相关且相互独立; 当 $-2<\dfrac{a}{b}<-\dfrac{1}{2}$ 时, ξ 与 η 正相关且不独立; 否则 ξ 与 η 负相关且不独立.

B33. (1) $X_1\sim N(0,1)$, $X_2\sim N(0,16)$, $X_3\sim N(1,4)$;

(2) X_1 与 X_2 相关且不独立; X_1 与 X_3 相关且不独立; X_2 与 X_3 不相关且相互独立; X_1,X_2 与 X_3 不独立;

(3) $\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2)^{\mathrm{T}}\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$, 其中 $\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}13&0\\0&7\end{pmatrix}$.

B34. $1-\Phi\left(\sqrt{\dfrac{10}{3}}\right)\approx 0.033\,9$.

B35. $1-\Phi(1)\approx 0.158\,7$.

第 5 章

思考题五

1. 在"高等数学"中研究的对象都是确定的, 不具有随机性, 如对于数列 $\{a_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, 则意味着对于任意的实数 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 均有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立, 也就是对于满足 $n>N$ 的 n, $|a_n-a|\geqslant\varepsilon$ 是不会出现的; 在"概率论"中, 依概率收敛讨论的是随机变量序列的收敛性, 如对随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 而言, 有 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$, 其中 ξ 可以是随机变量也可以是实数. 那就意味着对于任意的实数 $\varepsilon>0$, 当 n 充分

大时, 事件 "$\{|\xi_n-\xi|<\varepsilon\}$" 发生的概率很大, 接近 1, 但不能说事件 "$\{|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon\}$" 不会发生, 只是该事件发生的可能性非常小, 几乎为 0 而已.

2. 马尔可夫不等式适用于 k 阶矩存在的随机变量, 切比雪夫不等式则要求随机变量的数学期望和方差都存在才可以使用.
3. 大数定律与中心极限定理都是研究随机变量序列的部分和 (或者说随机变量的算术平均) 的极限行为. 对于独立同分布的随机变量序列, 当它们的方差有限时, 大数定律与中心极限定理都是成立的. 它们的区别是: 大数定律 (此书中介绍的其实是弱大数定律的一种) 研究的是随机变量序列的算术平均在一定条件下的依概率收敛性质, 而中心极限定理讨论了随机变量序列的算术平均在一定条件下可以用正态分布来近似. 所以在两个都适用的条件下, 中心极限定理不仅可以给出随机变量序列的算术平均落入某区域的概率的极限值, 还可以给出此概率的一个近似值 (当 n 充分大时).
4. 例 5.2.5 中的 $\{X_i\}$ 独立同分布, 且方差有限, 所以切比雪夫不等式与中心极限定理都适用. 由于切比雪夫不等式仅仅可以得到随机变量落入某区域的一个界, 而中心极限定理则可以给出当 n 充分大时, 随机变量序列的部分和 (或算术平均) 落入某区域的近似概率. 从一定角度来看, 中心极限定理讨论的概率更加 "精确". 事实上, 比较两者的条件, 也可知切比雪夫不等式的适用面更广, 而其结论就相对 "粗糙" 些.

习题五

(A)

A1. $\dfrac{1}{2}$.

A2. (1) 9; (2) 3.

A3. $\dfrac{1}{2}$.

A4. $P\{Y<140\}\approx\Phi(1)=0.841\,3$.

A5. $P\{|Y|>24\}\approx 2(1-\Phi(1))=0.317\,4$.

(B)

B1. (1) 72%; (2) 75%.

B2. 92.8%.

B3. 7.

B4. 提示: 可求出 $X_{(n)}$ 的分布函数, 并利用依概率收敛的定义来得到; 或者利用切比雪夫不等式证明.

B5. 提示: 利用切比雪夫不等式.

B6. (1) 收敛, 极限值为 $\sigma^2+\mu^2$;

(2) 收敛, 极限值为 σ^2;

(3) 收敛, 极限值为 $\dfrac{\mu}{\sigma^2+\mu^2}$;

(4) 收敛, 极限值为 $\dfrac{\mu}{\sigma}$.

B7. (1) $\dfrac{2}{\lambda^2}$; (2) $N\left(\dfrac{2}{\lambda},\dfrac{1}{25\lambda^2}\right)$; (3) 0.5.

B8. 可以, 因为 $1-\Phi(6.5)=0$.

B9. (1) 99.76%, 99.66%, 99.55%; (2) 117 次.

B10. $\Phi\left(\dfrac{10\sqrt{122}}{61}\right)\approx 96.49\%$.

B11. (1) 86.21%; (2) 94.29%.

思考题六

1. 统计量是样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个函数 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，它不包含任何未知参数; 统计量的值是在样本得到观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 后，将其代入函数后所得的值 $T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$; 抽样分布是统计量 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布.
2. 简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 满足: (1) 独立性: $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立; (2) 代表性: X_i 与总体 X 具有相同的分布. 简单随机抽样的实施: 对于有限总体，采用有放回抽样; 对于无限总体，采用无放回抽样. 另外，当总体容量 N 比样本容量 n 大得多时，实际中也可将无放回抽样近似地当作有放回抽样来处理.
3. 对于给定的实数 α, $0 < \alpha < 1$, 如果 x_α 满足 $P\{X > x_\alpha\} = \alpha$, 就称 x_α 是 X (或相应的分布) 的上 α 分位数; 如果 x_α 满足 $P\{X < x_\alpha\} = \alpha$, 就称 x_α 是 X (或相应的分布) 的下 α 分位数.

   利用 Excel 中的函数 NORM.INV, T.INV, CHISQ.INV, F.INV 可以分别得到正态分布、t 分布、χ^2 分布和 F 分布的分位数的值.
4. (3), (4), (6) 不正确.
5. 不一定. 当总体 X 是正态总体时, $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立.
6. 不一定. 当 X 和 Y 相互独立时成立.

习题六

(A)

A1. (1) $p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{C}_{10}^{x_i} 0.2^{x_i} 0.8^{10-x_i}$, $x_i = 0, 1, \cdots, 10, i = 1, 2, \cdots, n$;

(2) $p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{x_i!}$, $x_i = 0, 1, \cdots, i = 1, 2, \cdots, n$;

(3) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{2}}$, $-\infty < x_i < +\infty, i = 1, 2, \cdots, n$;

(4) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-x_i}$, $x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

A2. (1) 和 (4) 是统计量, (2) 和 (3) 不是.

A3. $\overline{x} = 3.28$, $s^2 = 0.347$, $b_2 = 0.277\,6$.

A4. $\overline{x} = 0.50$, $s^2 = 0.723\,8$.

A5. (1) 0.3, 0.03; (2) 0.21; (3) 0.7^7.

A6. (1) $\chi^2_{0.05}(5) = 11.070\,5$, $\chi^2_{0.06}(5) = 10.596\,2$, $\chi^2_{0.95}(5) = 1.145\,5$, $\chi^2_{0.94}(5) = 1.249\,9$;
(2) $t_{0.05}(8) = 1.859\,5$, $t_{0.06}(8) = 1.740\,2$, $t_{0.95}(8) = -1.859\,5$, $t_{0.94}(8) = -1.740\,2$;
(3) $F_{0.05}(3,5) = 5.409\,5$, $F_{0.05}(5,3) = 9.013\,5$, $F_{0.04}(3,5) = 6.097\,9$, $F_{0.04}(5,3) = 10.617\,3$.

A7. (1) 0.05; (2) $\chi^2(10)$, 15.987 2.

A8. 3.

A9. (1) 0.10; (2) 1.383 0.

A10. 230.161 9, 57.240 1.

A11. (1) $N\left(0, \dfrac{1}{16}\right)$; (2) $\chi^2(16)$; (3) $t(9)$; (4) $t(2)$; (5) $N\left(0, \dfrac{15}{16}\right)$.

A12. 0.94.

A13. 0.05.

(B)

B1. (1) 0.682 6; (2) 0.329.

B2. (1) $N(0,1)$; (2) $t(8)$; (3) $\chi^2(8)$; (4) $\chi^2(9)$; (5) $\chi^2(1)$; (6) $F(1,8)$; (7) $F(1,2)$; (8) $F(2,2)$.

B3. $a=\dfrac{1}{2(1+\rho)}$, $n=10$.

B4. (1) 68 次; (2) 97 次.

B5. (1) 0, 0.2; (2) 2.

B6. $E(\overline{X})=\dfrac{\theta}{2}$, $E(\overline{X}^2)=\dfrac{4\theta^2}{15}$, $E(S^2)=\dfrac{\theta^2}{12}$.

B7. (1) $\dfrac{1}{\lambda}$, $\dfrac{1}{10\lambda^2}$; (2) $\dfrac{1}{10\lambda}$, $\dfrac{1}{100\lambda^2}$.

B8. $\chi^2(10)$.

B9. $t(7)$.

B10. (1) $\pm\sqrt{\dfrac{45}{14}}$; (2) $\pm\sqrt{\dfrac{135}{14}}$.

B11. $c=F_{0.025}(6,6)\approx 5.82$.

B12. (1) 0.5; (2) 0.

第 7 章

思考题七

1. 未知参数的估计量是一个统计量, 是样本的函数, 是随机变量; 而估计值则是将样本的一次观测值代入估计量计算后得到的值, 是一个数值.
2. 因为 $\overline{X}$ 是参数 μ 的估计量, 是一随机变量, 而 μ 是参数真值, 为常数, 所以一般情形下, $\overline{X}$ 的值不等于 μ. 另外, 当总体是连续型总体时, $P\{\overline{X}=\mu\}$ 和 $P\{S^2=\sigma^2\}$ 都为零.
3. 不是.
4. 参见 7.1 节的介绍.
5. 求估计量的步骤参见 7.1 节的介绍. 各分布参数的矩估计和极大似然估计如下:

分布	$B(1,p)$	$B(n,p)$	$P(\lambda)$	$U(a,b)$	$E(\lambda)$	$N(\mu,\sigma^2)$
矩估计	$\widehat{p}=\overline{X}$	$\widehat{p}=\dfrac{\overline{X}}{n}$	$\widehat{\lambda}=\overline{X}$	$\widehat{a}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ $\widehat{b}=\overline{X}+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$	$\widehat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$	$\widehat{\mu}=\overline{X}$ $\widehat{\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$
极大似然估计	$\widehat{p}=\overline{X}$	$\widehat{p}=\dfrac{\overline{X}}{n}$	$\widehat{\lambda}=\overline{X}$	$\widehat{a}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ $\widehat{b}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$	$\widehat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$	$\widehat{\mu}=\overline{X}$ $\widehat{\sigma^2}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

6. 参见 7.2 节的介绍.
7. 参见 7.3 节的介绍.

8. 枢轴量是样本和待估参数的函数，其分布不依赖于未知参数；而统计量只是样本的函数，形式上不能与未知参数有关.

9. 参见 7.3 节和 7.4 节的介绍.

10. 分三种情形：

(1) 当样本容量 $n > 50$ 时，枢轴量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 近似服从 $N(0,1)$，则总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\overline{X} \pm z_{\alpha/2}S/\sqrt{n})$；

(2) 当样本容量 $n \leqslant 50$ 且样本数据具有较好的对称分布时，枢轴量 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ 近似服从 $t(n-1)$ 分布，则总体均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\overline{X} \pm t_{\alpha/2}(n-1)S/\sqrt{n})$；

(3) 当样本容量 $n \leqslant 50$ 且样本数据明显不具有对称分布时，可以考虑采用其他方法来构造均值 μ 的区间估计，本书不予讨论.

习题七

(A)

A1. (1) $\widehat{p} = \overline{X}$； (2) $\widehat{\lambda} = \overline{X}$； (3) $\widehat{a} = 2\overline{X} - 2$.

A2. (1) $\widehat{p} = \overline{X}$； (2) $\widehat{\lambda} = \dfrac{1}{\overline{X}}$； (3) $\widehat{b} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.

A3. (1) 矩估计量为 $\widehat{\theta}_1 = \dfrac{\overline{X}}{2-\overline{X}}$，矩估计值为 0.336；

极大似然估计量为 $\widehat{\theta}_2 = \dfrac{1}{\ln 2 - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i}$，极大似然估计值为 0.577；

(2) 矩估计量为 $\widehat{\theta}_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}A_2}$，矩估计值为 0.484 5；

极大似然估计量为 $\widehat{\theta}_2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} |X_i|$，极大似然估计值为 0.468；

(3) 矩估计量为 $\widehat{\theta}_1 = 2\overline{X} - 2$，矩估计值为 0.186；

极大似然估计量为 $\widehat{\theta}_2 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，极大似然估计值为 0.35.

A4. $\widehat{p} = \dfrac{1}{\overline{x}} = \dfrac{n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$.

A5. 矩估计值 $\widehat{\theta}_1 = 0.5$，极大似然估计值 $\widehat{\theta}_2 = 0.5$.

A6. θ 的矩估计值 $\widehat{\theta}_1 = \dfrac{1}{3}$，极大似然估计值 $\widehat{\theta}_2 = \dfrac{1}{3}$；$\lambda$ 的矩估计值 $\widehat{\lambda}_1 = \dfrac{1}{3}$，极大似然估计值 $\widehat{\lambda}_2 = \dfrac{1}{3}$.

A7. $\widehat{\theta} = \dfrac{1}{2}A_2 = \dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$，

$\widehat{\mu}_2 = A_2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$，

$\widehat{p} = \exp\left(-\dfrac{1}{A_2}\right) = \exp\left(-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}\right)$.

A8. $\dfrac{1}{18}$.

A9. 都是 μ 的无偏估计量，$\widehat{\mu}_3$ 最有效.

A10. $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

A11. (1) $(21.557, 22.083)$; (2) 35.

A12. (1) $(3\,172.333\,6, 3\,629.533\,0)$; (2) $3\,213.208\,3$.

A13. $(6.550\,5, 50.338\,4)$.

A14. $(-12.909\,5, -0.490\,5)$.

A15. (1) $\widehat{\mu}=8.081$, $\widehat{\sigma^2}=6.444$. (2) $(6.684, 9.478)$; (3) $(3.751, 16.464)$.

A16. (1) $(221.613, 464.312)$; (2) 431.190.

A17. $(-159.814\,7, -110.185\,3)$, $-155.826\,6$.

A18. (1) $(-4.01, 14.61)$; (2) $(-4.267, 14.867)$; (3) $(0.385\,3, 3.859\,0)$.

A19. $(-0.574\,5, -0.345\,5)$.

(B)

B1. $\widehat{\theta}=2\overline{X}$, $E(\widehat{\theta})=\theta$, $\mathrm{Var}(\widehat{\theta})=\dfrac{1}{5n}\theta^2$.

B2. $\left[\dfrac{rS}{t}\right]$.

B3. 矩估计量为 $\dfrac{2\overline{X}-(a_2+a_3)}{2a_1-a_2-a_3}$, 极大似然估计量为 $\dfrac{n_1}{n}$.

B4. (1) $a+b+c=1$; (2) $a=\dfrac{1}{6}, b=\dfrac{1}{3}, c=\dfrac{1}{2}$.

B5. (1) 矩估计量为 $\widehat{\theta}_1=\dfrac{3}{2}\overline{X}$, 极大似然估计量为 $\widehat{\theta}_2=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$;

(2) $\widehat{\theta}_2$ 优于 $\widehat{\theta}_1$;

(3) $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ 均是 θ 的相合估计量.

B6. (1) 略; (2) $c=\dfrac{1}{n+1}$; (3) 是.

B7. (1) θ 的矩估计量为 $\widehat{\theta}=\dfrac{4}{3}\overline{X}$, 它是 θ 的无偏估计, 因为 $E(\widehat{\theta})=\dfrac{4}{3}E(\overline{X})=\dfrac{4}{3}E(X)=\theta$;

(2) λ 的极大似然估计量为 $\widehat{\lambda}=\left(\ln 3-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^{-1}$, 它是 λ 的相合估计, 因为

$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i \xrightarrow{P} E(\ln X)=\ln 3-\dfrac{1}{\lambda}$.

B8. (1) $\widehat{\theta}=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$;

(2) 密度函数为 $g(x)=\begin{cases} ne^{-nx}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0; \end{cases}$

(3) 可以;

(4) $\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}+\dfrac{\ln\alpha}{n}$.

B9. 225.

B10. $(0.579\,3, 0.778\,5)$.

第 8 章

思考题八

1. 参见 8.1 节的介绍.
2. 当原假设成立时, “样本落入拒绝域” 是小概率事件. 根据小概率原理, 小概率事件在一

次观察中几乎不会发生. 因此, 当样本值落在拒绝域时, 就有充分的理由认为原假设不成立, 即作出拒绝原假设的判断.

3. 参见 8.1 节的介绍.

4. 对于有关参数的假设检验, 将根据样本资料希望得到支持的假设作为备择假设; 对于有关分布的假设检验, 则将不希望被拒绝掉的假设作为原假设.

5. 在给定的显著性水平 α 下, 对于右侧检验, 若根据样本资料作出拒绝原假设 $H_0: \theta \leqslant \theta_0$ 的判断, 则在左侧检验中, 将作出接受原假设 $H_0: \theta \geqslant \theta_0$ 的判断; 对于右侧检验, 若根据样本资料作出接受原假设 $H_0: \theta \leqslant \theta_0$ 的判断, 则在左侧检验中, 将有可能作出接受原假设 $H_0: \theta \geqslant \theta_0$ 的判断, 也有可能作出拒绝原假设 $H_0: \theta \geqslant \theta_0$ 的判断.

6. 不矛盾. 这意味着, 根据目前的样本资料, 有 $100 \times (1-\alpha_1)\%$ 的把握拒绝原假设, 但没有 $100 \times (1-\alpha_2)\%$ 的把握拒绝原假设.

7. 参见 8.4 节的介绍.

8. 参见 8.5 节的介绍.

习题八

(A)

A1. (1) 第 I 类错误: 实际袋装土豆片符合标准 (平均重量大于或等于 60 g), 由于抽样的随机性, 检验结果判断不符合标准;

第 II 类错误: 实际袋装土豆片不符合标准 (平均重量小于 60 g), 由于抽样的随机性, 检验结果判断符合标准;

(2) 消费者希望控制犯第 II 类错误的概率, 商家希望控制犯第 I 类错误的概率.

A2. (1) $H_0: \mu \leqslant 15\,000$, $H_1: \mu > 15\,000$; 检验统计量为 $Z = \dfrac{\overline{X} - 15\,000}{1\,500/\sqrt{n}}$. 拒绝域为 $W = \{Z > z_{0.05} = 1.645\}$. 拒绝原假设, 即有充分的把握认为该厂生产的显像管寿命显著地高于规定的标准;

(2) P-值 $= 0.000\,233 < 0.05$, 拒绝原假设, 和 (1) 的判断结果一致.

A3. (1) $H_0: \mu = 500$, $H_1: \mu \neq 500$; 检验统计量为 $T = \dfrac{\overline{X} - 500}{S/\sqrt{n}}$. 拒绝域为 $W = \{|T| > t_{0.01}(9) = 2.821\}$. 不能拒绝原假设, 即认为机器的工作正常;

(2) P-值 $= 0.355 > 0.02$, 不能拒绝原假设, 和 (1) 的判断结果一致.

A4. 检验统计量为 $T = \dfrac{\overline{X} - 450}{S/\sqrt{n}}$. P-值 $= 0.000\,685 < 0.05$, 有充分的把握认为该校学生外卖月平均消费额高于 450 元.

A5. P-值 $= 0.016\,3 < 0.05$, 有充分的把握认为该论坛的日平均发帖量小于 510 条.

A6. $H_0: \mu \geqslant 15$, $H_1: \mu < 15$, 不能拒绝原假设, 即认为广告是可靠的.

A7. $H_0: \mu \leqslant 1.67$, $H_1: \mu > 1.67$, 拒绝原假设, 即有充分的把握认为该地区男子的身高显著高于全国平均水平.

A8. $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 < \mu_2$, 不能拒绝原假设, 即认为狗注射该疫苗后体温没有显著升高.

A9. $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 > \mu_2$, 拒绝原假设, 即有充分的把握认为该广告的宣称可靠.

A10. P-值 $= 0.021 < 0.05$, 拒绝原假设, 有充分的把握认为牛奶的容量标准差符合要求.

A11. $H_0: \mu = 15$, $H_1: \mu \neq 15$, 不能拒绝原假设, 即认为零件的平均长度为 15 cm; $H_0: \sigma \leqslant 0.2$, $H_1: \sigma > 0.2$, 不能拒绝原假设, 即认为零件长度的标准差小于 0.2 cm. 综上, 认为这批零件符合标准要求.

A12. 有充分的把握认为 A 矿的煤产生的热量要显著地大于 B 矿的煤.

A13. (1) 认为两个方差没有显著差异;

(2) 没有充分的把握认为打字员甲的平均页出错字数显著少于打字员乙.

A14. (1) 有充分的把握认为两个群体心率的方差有显著差异;

(2) 有充分的把握认为男性长跑运动员的心率显著低于一般健康男性.

(B)

B1. (1) 检验统计量为 $Z = 4(\overline{X}-1)$, 拒绝域为 $W = \{4|\overline{X}-1| \geqslant z_{0.025} = 1.96\}$, 犯第 II 类错误的概率为 0.021;

(2) 检验统计量为 $Z = 15S^2$, 拒绝域为 $W = \{15S^2 \geqslant \chi^2_{0.05}(15) = 24.996\}$, 犯第 II 类错误的概率为 0.024 7;

(3) 0.030 8, 0.118 7.

B2. $H_0: \mu_2-\mu_1 \leqslant 7$, $H_1: \mu_2-\mu_1 > 7$, P-值 $= 0.411$, 不能拒绝原假设, 即认为该培训机构的宣称不可靠.

B3. (1) $H_0: \sigma_1 \leqslant \sigma_2$, $H_1: \sigma_1 > \sigma_2$, P-值 $= 0.019 < 0.05$, 拒绝原假设, 即有充分的把握认为 B 高校教师的收入差距程度显著低于 A 高校;

(2) $H_0: \mu_1-\mu_2 \leqslant 5$, $H_1: \mu_1-\mu_2 > 5$, P-值$=0.270>0.1$, 不能拒绝原假设, 即根据目前的样本资料, 没有充分的理由认为 A 高校教师的平均收入要比 B 高校至少多 5 万元.

B4. (1) $(890.7, 903.3)$;

(2) 因为 $900 \in (890.7, 903.3)$, 认为子弹发射的枪口速度与设计要求没有显著差异;

(3) P-值 $= 0.297\,7 > 0.05$, 认为子弹发射的枪口速度与设计要求没有显著差异, 结果与 (2) 一致.

B5. 不能拒绝原假设, 认为该八面体是匀称的.

B6. 不能拒绝原假设, 认为在该公交车站的候车人数服从泊松分布.

B7. 拒绝原假设, 即有充分的把握认为 $a \neq 3$.

B8. 不能拒绝原假设, 即认为前后两位客户的时间间隔服从均值为 10 的指数分布.

B9. 不能拒绝原假设, 即认为该地区成年男子的身高服从正态分布.

B10. 拒绝原假设, 即有充分的把握认为收入与文化消费支出不独立.

第 9 章

思考题九

1. 方差分析的主要任务是比较分类数据均值的差异, 因此一般方差分析的数据为来自几个方差相同的正态总体的分类数据; 且要求数据具有独立性. 方差分析的基本假设为: 各样本来自相互独立的正态总体, 各总体方差相等, 即满足方差齐性.

2. 假设 $X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in_i}$ 是来自第 i 个正态总体 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ 的样本, 其中 μ_i, σ^2 均为未知参数, 总体 X_i 相互独立. 方差分析的数学模型:

$$\begin{cases} X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ 且相互独立}, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, r, j = 1, 2, \cdots, n_i,$$

其中 μ_i 为第 i 个总体的均值 (理论均值), ε_{ij} 为相应的随机误差.

方差分析是要检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r.$$

基本步骤如下:

(1) 建立检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r$;